

# ДОКЛАДЫ

## АКАДЕМИИ НАУК СССР

ВЫХОДЯТ ТРИ РАЗА В МЕСЯЦ

Редакционная коллегия: акад. Л. А. Арцимович, акад. А. Г. Бетехтин, акад. С. А. Векшинский, акад. Б. А. Казанский, акад. А. Н. Колмогоров, (зам. главного редактора), акад. С. А. Лебедев, акад. А. И. Опарин (главный редактор), акад. Е. Н. Павловский, акад. Л. И. Седов, акад. Н. М. Страхов, акад. А. Н. Фрумкин (зам. главного редактора)

29-й ГОД ИЗДАНИЯ

1961

ТОМ 137, № 5

### СОДЕРЖАНИЕ

#### МАТЕМАТИКА

Стр.

И. Я. Бакельман и М. А. Красносельский. Нетривиальные решения задачи Дирихле для уравнений с оператором Монжа — Ампера . . . . .	1007
Ф. А. Березин и Л. Д. Фаддеев. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом . . . . .	1011
А. А. Вашарин и П. И. Лизоркин. Некоторые краевые задачи для эллиптических уравнений с сильным вырождением на границе . . . . .	1015
Б. Б. Венков. Когомологии групп единиц в алгебрах с делением . . . . .	1019
В. М. Волосов. О высших приближениях при усреднении . . . . .	1022
Е. Г. Гладышев. О периодически коррелированных случайных последовательностях . . . . .	1026
А. А. Гольдберг. О распределении значений мероморфных функций с разделениями нулями и полюсами . . . . .	1030
И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн. К теории треугольных представлений несамосопряженных операторов . . . . .	1034
А. А. Дезин. Различные типы инвариантных систем простейшей структуры . . . . .	1038
Е. Б. Дынкин и М. Б. Малютов. Случайное блуждание на группах с конечным числом образующих . . . . .	1042
И. А. Ибрагимов. О спектральных функциях некоторых классов стационарных гауссовских процессов . . . . .	1046
Л. И. Камынин и В. Н. Масленникова. О решении первой краевой задачи в целом для квазилинейного параболического уравнения . . . . .	1049
М. Б. Капилевич. О сингулярных задачах Трикоми в окрестности конечной и бесконечно удаленной особой линии . . . . .	1053
В. Г. Мазья. Некоторые оценки решений эллиптических уравнений второго порядка . . . . .	1057
В. А. Плисс. О существовании периодических решений у некоторых нелинейных систем . . . . .	1060
А. И. Сирота. Простые подгруппы односвязных вещественных простых групп Ли . . . . .	1063
В. Я. Стеценко. К геометрии конусов в банаховом пространстве . . . . .	1067
Тан Чжэнь. Об ошибках округлений при численном решении систем совместных линейных алгебраических уравнений методом Холецкого и методом главных элементов . . . . .	1071
М. Ф. Тиман. Об абсолютной сходимости кратных рядов Фурье . . . . .	1074

#### КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Э. И. Нечипорук. О синтезе Ж-схем . . . . .	1078
---	------

## МЕХАНИКА

- Г. Л. Гродзовский, Ю. Н. Иванов и В. В. Токарев. О движении тела переменной массы с постоянной затратой мощности в гравитационном поле . . . 1082

## ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- М. Р. Фельдман. Устойчивость ортотропных пластин ступенчато переменной жесткости . . . 1086

## ФИЗИКА

- В. Ф. Китаева и Н. Н. Соболев. Об уширении линий водорода в плазме дуги и ударной трубы . . . 1091  
Л. В. Тверская. О влиянии упруго-релаксационных напряжений на кристаллизацию очень вязких жидкостей . . . 1095

## ГЕОФИЗИКА

- А. Д. Данилов. Молекулярные ионы в верхней атмосфере . . . 1098  
В. Г. Истомина. Ионы азота в верхней атмосфере Земли и ночная ионизация в области E . . . 1102

## ХИМИЯ

- Ю. А. Арбузов, А. А. Кирушкин, М. Н. Колосов, Ю. А. Овчинников и М. М. Шемякин. Изучение путей построения кольчатой системы ВА тетрациклинов. Синтез эфиров замещенных 2-кетодиклогексилуксусных кислот . . . 1106  
А. К. Арен, Я. Я. Дрегерис и Г. Я. Ванаг. 2-β-Оксиэтил-2-фенилиндандион-1,3 . . . 1110  
М. И. Батуев, А. А. Ахрем и А. Д. Матвеева. Оптическое исследование конформаций 2-метил-1-оксидиклогексилэтиленоксидов . . . 1113  
Э. Е. Вайнштейн, Ю. Ф. Копелев и Б. И. Котляр. О некоторых результатах рентгеноспектрального изучения ферроцена и его производных . . . 1117  
И. Л. Кнуянц и Ю. А. Чебурков. О случае проявления псевдогалоидных свойств трифторметильной группой, связанной с атомом углерода . . . 1121  
Н. М. Назарова и Л. Х. Фрейдлин. Термическое алкилирование циклогексана олефинами под давлением . . . 1125  
Р. Х. Фрейдлина, Г. Т. Мартиросян и А. Н. Несмеянов. Присоединение трихлорбромметана к соединениям строения  $R(C_6H_5)_2ECH=CH_2$  (где  $R = C_6H_5, CH_3$ ;  $E = Sn, Si, C$ ) . . . 1129  
М. Я. Хорлина и В. Н. Кост. Гомолитическая изомеризация 2-бром-3,3-дихлорбутена-1 . . . 1133  
Т. И. Юрженко и М. А. Дикий. Исследование автоокисления алкил- и галоидпроизводных 1,1-дифенилэтана и изопропилбензола . . . 1137

## ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- Н. Н. Бахман. Роль конвективного перемешивания при горении конденсированных смесей . . . 1141  
Н. К. Галкина, Р. Н. Рубинштейн и М. М. Сенявин. Статика обмена смеси ионов . . . 1144  
М. Г. Гоникберг. О применении высокого давления для изучения коллективного взаимодействия в процессах полимеризации . . . 1147  
В. Ф. Иванов и З. А. Иофа. Исследование кинетики электровосстановления железа на капельном ртутном электроде . . . 1149  
Н. М. Померанцев, В. А. Храменков, Л. В. Сумин и А. В. Зимин. Спектры ядерного магнитного резонанса облученных перфтороктадиена и перфтордодекадиена . . . 1153  
Г. Б. Равич и Ю. Н. Буцев. Влияние полиморфизма на теплопроводность . . . 1155  
Викт. И. Спицын, В. А. Пчелкин и И. В. Гончаров. К вопросу о действии поверхностно-активных веществ на кинетику растворения карбоната кальция в минеральных кислотах . . . 1158

## ХИМИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

- В. С. Сотников, А. С. Белановский. Адсорбция ионов некоторых металлов при травлении и промывке германия и кремния . . . 1162

## ГЕОЛОГИЯ

- С. М. Андронов. Новые данные по стратиграфии девонских отложений восточного склона Южного Урала . . . 1166  
А. А. Арсеньев. О закономерности размещения кимберлитов в восточной части Сибирской платформы . . . 1170  
И. Я. Баллах. Проверка возможности использования сейсморазведки для прямых поисков нефтяных залежей . . . 1174

	Стр.
Д. И. Горжевский и Е. М. Лазько. Монголо-Охотский глубинный разлом . . .	1177
С. П. Горшков. Геологический возраст и палеогеографические особенности формирования террас среднего течения Енисея . . . . .	1181
Н. Н. Карлов. Континентальная костеносная брекчия с ветрогранниками на южном склоне Украинского кристаллического щита . . . . .	1185
Н. В. Логвиненко, Г. В. Карпова, К. Г. Шандыба и Д. П. Шапошников. К вопросу о стратиграфическом подразделении таврической формации Крыма . . . . .	1188
С. С. Эллерн и В. М. Винокуров. О прослоях туффовых пород в живецких отложениях на юге Татарии . . . . .	1192
<b>ГИДРОГЕОЛОГИЯ</b>	
И. М. Кисин и И. Н. Степанов. О содержании твердых минеральных частиц в ледниках Кавказа . . . . .	1195
<b>ПЕТРОГРАФИЯ</b>	
У. Г. Дистанов. О составе глинистого материала палеогеновых опок Среднего Поволжья . . . . .	1198
В. М. Фридланд. Два пути формирования конкреций, образующих латериты . . . . .	1202
<b>ПИТОЛОГИЯ</b>	
И. Е. Лескевич и С. В. Савчук. Каолинит в нижнекарбоновых углях Западного Донбасса . . . . .	1206
Ю. П. Непрочнов и М. Ф. Михно. Данные о строении осадочной толщи глубоководной впадины Черного моря в районе г. Сочи . . . . .	1209
Д. Г. Панов и М. К. Спичак. Скорость осадконакопления в Азовском море . . . . .	1213
<b>ГИСТОЛОГИЯ</b>	
Н. Д. Ключков. Изменения эндотелия лимфатических мешков при сокращении подлежащих тканей . . . . .	1215
<b>ЭКОЛОГИЯ</b>	
А. А. Иноземцев. Воздействие мухоловки-пеструшки ( <i>Muscicapa hypoleuca</i> Pall.) на численность ее жертв . . . . .	1218
Л. З. Родионова. Изменение чувствительности к высокой температуре в развитии китайского дубового шелкопряда ( <i>Antheraea pernyi</i> G.-M.) . . . . .	1222
<b>БИОХИМИЯ</b>	
В. А. Белицер и О. В. Лобачевская. Частичное превращение сульфгидрильных групп овальбумина во внутримолекулярные дисульфидные связи . . . . .	1226
<b>ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ</b>	
В. В. Пиневиц и Н. Н. Верзилин. Влияние гидразида малеиновой кислоты на некоторые протококковые водоросли . . . . .	1230
В. И. Свиначев. Особенности формирования и развития корневых систем у кукурузы, сои и арбузов при посеве гнездовым способом . . . . .	1233
<b>МОРФОЛОГИЯ</b>	
П. М. Мажуга. Пластичность кровеносного русла синовиальной оболочки в связи с различной функцией суставов . . . . .	1237
<b>ЭВОЛЮЦИОННАЯ МОРФОЛОГИЯ</b>	
В. Д. Ильичев. К морфологии и функции лицевого диска птиц . . . . .	1241
<b>ФИЗИОЛОГИЯ</b>	
Г. А. Наследов. Влияние симпатического нерва на потенциалы двигательной концевой пластинки . . . . .	1245
<b>ЭМБРИОЛОГИЯ</b>	
С. Г. Соин и Ж. А. Черняев. О развитии перибластического синуса у эмбрионов лососевидных и некоторых других костистых рыб . . . . .	1249
<b>ПАЗИТОЛОГИЯ</b>	
О. П. Кулаковская и Р. А. Кротас. О <i>Khavia sinensis</i> Hsü ( <i>Caryophyllaeidae</i> , <i>Cestoda</i> ) — паразите, завезенном с Дальнего Востока в карповые хозяйства западных областей СССР . . . . .	1253
	1003

# CONTENTS

## MATHEMATICS

Pages

I. J. Bakel'man, M. A. Krasnosel'skii. Non-trivial solutions to Dirichlet's problem for equations with Monge — Ampère's operator . . . . .	1006
F. A. Berezin, L. D. Faddeev. A remark on Schrödinger's equation with a singular potential . . . . .	1011
A. A. Vasharin, P. I. Lizorkin. Certain boundary value problems for elliptic equations with a strong degeneration at the boundary . . . . .	1015
B. B. Venkov. Cohomology of groups of units in algebras involving division . . . . .	1019
V. M. Volosov. Higher approximations in averaging . . . . .	1022
E. G. Gladyshev. Periodically correlated random sequences . . . . .	1026
A. A. Goldberg. Distribution of values of meromorphic functions with separated zeroes and poles . . . . .	1030
I. Ts. Gokhberg, M. G. Krein. On the theory of triangular representation of non-selfadjoint operators . . . . .	1034
A. A. Dezin. Certain types of invariant systems of simplest structure . . . . .	1038
E. B. Dynkin, M. B. Maliutov. Random wandering on groups having a finite number of generetrices . . . . .	1042
I. A. Ibragimov. Spectral functions of certain classes of Gaussian stationary processes . . . . .	1046
L. I. Kamynin, V. N. Maslennikova. The solution of the first boundary problem in the large for a quasilinear parabolic equation . . . . .	1049
M. B. Kapilevich. Tricomi's singular problems in the neighbourhood of a finite and infinite singular line . . . . .	1053
V. G. Mazia. Some evaluations of solutions to elliptic second-order equations . . . . .	1057
V. A. Pliss. The existence of periodic solutions to certain non-linear systems . . . . .	1060
A. I. Sirota. Simple subgroups of simply connected real simple Lie groups . . . . .	1063
V. J. Stetsenko. On the geometry of cones in Banach space . . . . .	1067
Tan Chzhen. On errors involved in the rounding-up of figures when solving numerically systems of consistent linear algebraic equations according to Choletski and by the method of principal elements . . . . .	1071
M. F. Timan. Absolute convergence of Fourier's multiple series . . . . .	1074

## CYBERNETICS AND THE REGULATION THEORY

E. I. Nechiporuk. The synthesis of $\mathcal{R}$ -circuits . . . . .	1078
--	------

## MECHANICS

G. L. Grodzovskii, Iu. N. Ivanov, V. V. Tokarev. The motion of a body of variable mass with constant expenditure of power in a gravitational field . . . . .	1082
--	------

## THEORY OF ELASTICITY

M. R. Feld'man. The stability of orthotropic plates whose rigidity varies by steps . . . . .	1086
--	------

## PHYSICS

V. F. Kitaeva, N. N. Sobolev. Broadening of hydrogen lines in the plasma of an arc and a shock tube . . . . .	1091
L. V. Tverskaia. The effect of elastic relaxation stresses on the crystallization of very viscous liquids . . . . .	1095

## GEOPHYSICS

A. D. Danilov. Molecular ions in the upper atmosphere . . . . .	1098
V. G. Istomin. Nitrogen ions in the upper atmosphere and the ionization of the region at night . . . . .	1102

## CHEMISTRY

Iu. A. Arbuzov, A. A. Kiriushkin, M. N. Kolosov, Iu. A. Ovchinnikov, M. M. Shemiakin. Inquiry into the ways of constructing a ring system of BA tetracyclines. The synthesis of esters of substituted 2-ketocyclohexylacetic acids . . . . .	1106
A. K. Aren, J. J. Dregeris, G. J. Vanag. The 2- $\beta$ -oxyethyl-2-phenylindandion-1,3 . . . . .	1110
M. I. Batuev, A. A. Akhrem, A. D. Matveeva. An optic investigation of conformations of 2-methyl-1-oxycyclohexylethylene oxides . . . . .	1113
E. E. Vainstein, Iu. F. Kopelev, B. I. Kotliar. Some results of an X-ray study of ferrocene and its derivatives . . . . .	1117
I. L. Knniants, Iu. A. Cheburkov. Manifestation of pseudohalogen properties by a trifluoromethyl group linked with a carbon atom . . . . .	1121

N. M. Nazarova, L. Kh. Freidlin. Thermal alkylation of cyclohexane by olefines under pressure . . . . .	1125
R. Kh. Freidlina, G. T. Martirosian, A. N. Nesmeyanov. Addition of trichlorobromomethane to compounds defined by the general formula $R(C_6H_5)_2 ECH=CH_2$ (where $R = C_6H_5, CH_3$ ; $E = Sn, Si, C$ ) . . . . .	1129
M. J. Khorlina, V. N. Kost. Homolytic isomerization of 2-bromo-3,3-dichlorobutene-I . . . . .	1133
T. I. Iurzhenko, M. A. Dikii. Autoxidation of the alkyl derivatives and halogen derivatives of 1,1-diphenylethane and isopropylbenzene . . . . .	1137

## PHYSICAL CHEMISTRY

N. N. Bakhman. The role of convection in the burning of condensed fuel mixtures . . . . .	1141
N. K. Galkina, R. N. Rubinstein, M. M. Seniavin. The statics of ion mixture exchange . . . . .	1144
M. G. Gonikberg. The use of high pressure in studying collective interaction in polymerization processes . . . . .	1147
V. F. Ivanov, Z. A. Iofa. The kinetics of the electrolytic reduction of iron on a dropping mercury electrode . . . . .	1149
N. M. Pomerantsev, V. A. Khramchenko, L. V. Sumin, A. V. Zimin. Nuclear magnetic resonance spectra of perfluorooctadiene and perfluorododecadiene when irradiated . . . . .	1153
G. B. Ravich, Iu. N. Burtsev. The effect of polymorphism on thermal conductivity . . . . .	1155
Vict. I. Spitsyn, V. A. Pchelkin, I. V. Goncharov. Concerning the action of surface active substances on the solution kinetics of calcium carbonate in mineral acids . . . . .	1158

## CHEMICAL TECHNOLOGY

V. S. Sotnikov, A. S. Belanovskii. Adsorption of ions of certain metals when germanium or silicon are being etched and washed . . . . .	1162
---	------

## GEOLOGY

A. A. Arseniev. On the regularity underlying the distribution of the Siberian platform . . . . .	1166
S. M. Andronov. Recent data on the stratigraphy of Devonian deposits of the eastern slope of the South Urals . . . . .	1170
I. J. Ballakh. A contribution to the field test data on the possibility to apply seismic prospecting to direct search for oil accumulations . . . . .	1174
D. I. Gorzhhevskii, E. M. Lazko. The Mongolian-Okhotskian deep seated break . . . . .	1177
S. P. Gorshkov. Geologic age and paleogeographic characters in the formation of terraces of the middle reaches of the Enisey river . . . . .	1181
N. N. Karlov. Continental bone breccia with wind edge inclusions at the southern slope of the Ukrainian crystalline shield . . . . .	1185
N. V. Logvinenko, G. V. Karpova, K. G. Shandyba, D. P. Shaposhnikov. On the problem as to the stratigraphic subdivision of the tauric formation of the Crimea . . . . .	1188
S. S. Ellern, V. M. Vinokurov. On interlayers of tuffitic rocks in Givetian deposits in South Tataria . . . . .	1192

## HYDROGEOLOGY

I. M. Kisin, I. N. Stepanov. On the content of hard mineral particles in the glaciers of the Caucasus . . . . .	1195
---	------

## PETROGRAPHY

U. G. Distanov. On the composition of argillaceous material of paleogenic siliceous rocks of Middle Volga region . . . . .	1198
V. M. Friedland. The two modes of formation of lateritic concretions . . . . .	1202

## LITHOLOGY

I. E. Leskevich, S. V. Savchuk. Kaolinite in Lower Carbonaceous coals of the West Donets basin . . . . .	1206
Iu. P. Neprochnov, M. F. Mikhno. Data on the structure of sedimentary strata of the deep-water depression of the Black Sea, in the Sochi district . . . . .	1209
D. G. Panov, M. K. Spichak. The rate of sediment accumulation in the Azov sea . . . . .	1213

## HISTOLOGY

N. D. Klochkov. Variations in the endothelium of lymphatic sacs, accompanying the contraction of underlying tissues . . . . .	1215
	1005

- A. A. Inozemtsev.** The influence of *Muscicapa hypoleuca* Pall. on the numeric composition of insect species preyed upon . . . . . 1218
- L. Z. Rodionova.** Variation in the sensitivity to high temperature during the development of *Antheraea pernyi* G.-M. . . . . 1222

BIOCHEMISTRY

- V. A. Belitzer, O. V. Lobachevskaja.** Sulphydryl groups of ovalbumin partly transformed into intramolecular disulphide bonds . . . . . 1226

PLANT PHYSIOLOGY

- V. V. Pinevich, N. N. Verzilin.** The effect of maleic acid hydrazide on certain protococcal algae . . . . . 1230
- V. I. Svinarev.** Peculiar traits in the formation development of the root system in *Zea mays*, *Soja hispida* and *Citrullus edulis* sown by the nest . . . . . 1233

MORPHOLOGY

- P. M. Madzuga.** The plasticity of circulatory system of synovial membrane in connection with the function of joints . . . . . 1237

EVOLUTIONAL MORPHOLOGY

- V. D. Il'ichev.** A contribution to the morphology and functional study of *limbus facialis* in birds . . . . . 1241

PHYSIOLOGY

- G. A. Nasledov.** The influence of N. sympathicus on the potentials of the motor terminal plate . . . . . 1245

EMBRYOLOGY

- S. G. Soin, Dz. A. Cherniaev.** On the development of periblastic sinus in embryos of *Salmonidae* and of some other *Teleostei* . . . . . 1249

PARASITOLOGY

- O. P. Kulakovskaja, P. A. Krotas.** On *Khavia sinensis* Hsü (*Caryophyllaeidae*, *Cestoda*) — a parasite imported from the Far East to *Cyprinidae* farms of Western regions of the USSR . . . . . 1253

И. Я. БАКЕЛЬМАН и М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ  
НЕТРИВИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ  
ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ МОНЖА — АМПЕРА

(Представлено академиком П. С. Александровым 23 XI 1960)

1. В настоящей работе рассматривается вопрос о неотрицательных решениях уравнения

$$rt - s^2 = f(x, y, z, p, q)(1 + p^2 + q^2)^\alpha, \quad (1)$$

где  $0 \leq \alpha \leq 1$ , удовлетворяющих условию

$$z(x, y)|_\Gamma = 0. \quad (2)$$

Задача рассматривается в ограниченной выпуклой области  $\Omega$ , граница  $\Gamma$  которой имеет ограниченную снизу положительным числом удельную кривизну. Относительно  $f(x, y, z, p, q)$  предполагается, что она непрерывна по совокупности переменных  $\{x, y\} \in \bar{\Omega}$ ,  $z \geq 0$ ,  $-\infty < p, q < \infty$ , неотрицательна и при значениях  $z$  из любого конечного промежутка равномерно относительно остальных переменных ограничена сверху. Неотрицательность  $f(x, y, z, p, q)$  означает, что уравнение (1) эллиплично и что решения задачи (1) — (2) (если они существуют) являются выпуклыми функциями.

Каждая выпуклая функция  $z(x, y)$  порождает своими опорными плоскостями  $z - z(x_0, y_0) = p(x - x_0) + q(y - y_0)$ , отображение точек  $\{x_0, y_0\} \in \bar{\Omega}$  в плоскость переменных  $\{p, q\}$ . Это отображение называют нормальным<sup>(1)</sup>. Нормальное отображение многозначно в ребристых и конических точках функции  $z(x, y)$ ; нормальное отображение порождает отображения множеств.

Мы будем понимать под решением задачи (1) — (2) неотрицательную выпуклую функцию с абсолютно непрерывной площадью нормального изображения, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду и анулирующуюся на  $\Gamma$ .

2. Рассмотрим вначале задачу

$$rt - s^2 = \varphi(x, y)(1 + p^2 + q^2)^\alpha, \quad z(x, y)|_\Gamma = 0. \quad (3)$$

Оказывается (см. (1); для случая  $\alpha = 0$  этот результат получен А. В. Погореловым<sup>(2)</sup>), что задача (3) в указанном классе имеет единственное решение, если  $\varphi(x, y)$  суммируема. Пусть  $z(x, y) = A_\alpha \varphi(x, y)$ .

**Теорема 1.** Оператор  $A_\alpha$  преобразует каждое равномерно ограниченное семейство неотрицательных функций в множество, компактное в смысле равномерной сходимости. Оператор  $A_\alpha$  преобразует каждую равномерно ограниченную и точечно сходящуюся последовательность функций в последовательность, равномерно сходящуюся.

Эта теорема доказывается методом, разработанным в (3).

**Теорема 2.** А. Операторы  $A_\alpha$  монотонны в том смысле, что из  $0 \leq \varphi(x, y) \leq \psi(x, y)$  следует неравенство  $A_\alpha \varphi(x, y) \leq A_\alpha \psi(x, y)$ .

Б. При  $0 \leq \alpha < 1$  для каждой неотрицательной функции  $\varphi(x, y)$  выполнены неравенства

$$A_\alpha[\lambda \varphi(x, y)] \geq \lambda^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} A_\alpha \varphi(x, y) \quad (0 \leq \lambda \leq 1). \quad (4)$$

В. Если  $\alpha_1 < \alpha_2$ , то для каждой неотрицательной  $\varphi(x, y)$  выполнено неравенство  $A_{\alpha_1} \varphi(x, y) \leq A_{\alpha_2} \varphi(x, y)$ .

Г. Справедливы оценки

$$0 \leq A_\alpha \varphi(x, y) \leq \begin{cases} r_0 \sqrt{[(1-\alpha)\|\varphi\|r_0^2 + 1]^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1}, & \text{если } 0 \leq \alpha < 1, \\ r_0 \sqrt{e^{\|\varphi\|r_0^2}}, & \text{если } \alpha = 1; \end{cases}$$

$$p^2 + q^2 \leq \begin{cases} [(1-\alpha)\|\varphi\|r_0^2 + 1]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - 1, & \text{если } 0 \leq \alpha < 1, \\ e^{\|\varphi\|r_0^2} - 1, & \text{если } \alpha = 1, \end{cases}$$

где  $p$  и  $q$  — угловые коэффициенты любой опорной плоскости к графику функции  $A_\alpha \varphi(x, y)$ ;  $1/r_0$  — оценка снизу удельной кривизны  $\Gamma$ .

3. Рассмотрим оператор

$$B\varphi(x, y) = A_\alpha f\left[x, y, \varphi(x, y), \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y), \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y)\right]. \quad (5)$$

Теорема 3. Оператор  $B$  оставляет инвариантным конус неотрицательных выпуклых функций, удовлетворяющих условию (2), и вполне непрерывен на этом конусе (в смысле равномерной метрики).

Нетрудно видеть, что неподвижные точки оператора  $B$  совпадают с решениями краевой задачи (1) — (2). Это позволяет для доказательства теорем существования применять различные общие принципы неподвижной точки в конусе (<sup>4, 5</sup>).

4. Теорема 4. Пусть выполнено условие

$$f(x, y, z, p, q) \leq \begin{cases} a_1(1+z^2)^\gamma, & \text{если } 0 \leq \alpha \leq 1, \\ a_1 \ln^{1-\varepsilon}(2+z), & \text{если } \alpha = 1, \end{cases} \quad (6)$$

где  $\gamma < 1 - \alpha$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $a_1 > 0$ . Тогда краевая задача (1) — (2) имеет по крайней мере одно решение.

Если  $f(x, y, 0, 0, 0) \equiv 0$ , то краевая задача имеет тривиальное нулевое решение. Возникает вопрос об условиях существования нетривиальных решений.

Теорема 5. Пусть выполнено условие (6) и пусть найдется такое  $\delta_0 > 0$ , что

$$f(x, y, z, p, q) \geq a_2 z^{2-\varepsilon} \quad (0 \leq z \leq \delta_0; -\infty < p, q < \infty), \quad (7)$$

где  $a_2 > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ . Тогда краевая задача (1) — (2) имеет по крайней мере одно решение, отличное от тождественного нуля.

Для доказательства этой теоремы применяется принцип существования ненулевой неподвижной точки у операторов, являющихся сжатиями конуса (<sup>5</sup>).

Единственность нетривиального решения удалось доказать пока для случая, когда  $0 \leq \alpha < 1$  и

$$f(x, y, z, p, q) \equiv f(x, y, z). \quad (8)$$

Теорема 6. Пусть  $f(x, y, z)$  не убывает по  $z$ ;  $f(x, y, z) > 0$  при  $z > 0$  и почти при всех точках  $\{x, y\} \in \Omega$ . Пусть

$$f(x, y, \lambda z) \geq \lambda^{\gamma_0} f(x, y, z) \quad (\{x, y\} \in \Omega; 0 \leq \lambda \leq 1; z \geq 0), \quad (9)$$

где  $\gamma_0 < 2(1 - \alpha)$ . Тогда краевая задача (1) — (2) может иметь более одного неотрицательного решения, отличного от тождественного нуля.

При доказательстве этой теоремы используется  $u_0$ -вогнутость <sup>(4)</sup> оператора  $B$ , где  $u_0(x, y)$  — функция, графиком которой является конус с вершиной над некоторой внутренней точкой области  $\Omega$ , направляющей которого является контур  $\Gamma$ .

Интересно отметить, что единственность нетривиального решения в условиях теоремы 6 получена при предположениях, когда нет принципа максимума.

5. В теоремах 4—6 предполагалось, что  $f(x, y, z, p, q)$  по переменной  $z$  растет существенно медленнее  $z^2$ . Приведем признак существования нетривиального решения, охватывающий случай сколь угодно «сильных» нелинейностей по  $z$ .

Теорема 7. Пусть найдутся такие  $\delta_0 > 0$  и  $M_0 > 0$ , что

$$f(x, y, z, p, q) \leq a_3 z^{\gamma_1} \quad (\{x, y\} \in \Omega; 0 \leq z \leq \delta_0; -\infty < p, q < \infty); \quad (10)$$

$$f(x, y, z, p, q) \geq a_4 z^{\gamma_1} \quad (\{x, y\} \in \Omega; z \geq M_0; -\infty < p, q < \infty), \quad (11)$$

где  $\gamma_1 > 2$ ,  $a_3, a_4 > 0$ . Тогда краевая задача (1) — (2) имеет кроме тривиального нулевого еще по крайней мере одно решение.

В условиях этой теоремы оператор  $B$  является растяжением конуса <sup>(5)</sup>.

6. В случае, когда функция  $f(x, y, z, p, q)$  по переменной  $z$  имеет перемежающиеся участки быстрого роста и участки медленного роста, краевая задача (1) — (2) имеет, вообще говоря, много решений. Укажем одну частную теорему для случая, когда  $0 \leq \alpha < 1$ .

Теорема 8. Пусть существует такая последовательность  $R_n \rightarrow \infty$  что

$$f(x, y, z, p, q) \geq a z^{\gamma_1} \quad (\delta R_n \leq z \leq R_n),$$

где  $\gamma_1 > 2$  и  $\delta > 0$  — достаточно малое число. Пусть, далее, существует такая последовательность  $R_n^* \rightarrow \infty$ , что

$$f(x, y, z, p, q) \leq a_n (1 + z^2)^{\gamma_2} \quad (0 \leq z \leq R_n^*),$$

где  $\gamma_2 < 1 - \alpha$ , а числа  $a_n$  удовлетворяют неравенствам

$$r_0 \sqrt{[(1 - \alpha) a_n (1 + R_n^{*2})^{\gamma_2} r_0^2 + 1]^{\frac{1}{1 - \alpha}} - 1} < R_n^*,$$

где  $1/r_0$  — оценка снизу для удельной кривизны контура  $\Gamma$ .

Тогда краевая задача (1) — (2) имеет счетное число различных решений  $z_n$ , максимумы которых неограниченно возрастают при  $n \rightarrow \infty$ .

7. В <sup>(6)</sup> установлены теоремы, из которых следует, что оператор

$$A_\alpha [E(x, y, z, p, q)r + 2F(x, y, z, p, q)s + G(x, y, z, p, q)t]$$

вполне непрерывен на конусе  $K$  выпуклых функций и оставляет этот конус инвариантным, если

$$0 \leq -E(x, y, z, p, q)\xi^2 - 2F(x, y, z, p, q)\xi\eta - G(x, y, z, p, q)\eta^2 \leq \frac{\xi^2 + \eta^2}{Q_1(p) + Q_2(q)},$$

где  $Q(p) > 0$ ,  $Q_2(q) > 0$  и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{Q_1(p)} < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{Q_2(p)} < \infty.$$

Это позволяет сформулированные выше теоремы распространить на случай уравнений

$$\frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^\alpha} = E(x, y, z, p, q)r + 2F(x, y, z, p, q)s + \\ + G(x, y, z, p, q)t + f(x, y, z, p, q)$$

с квазилинейной частью.

Сформулированные теоремы допускают также обобщение на случай уравнений

$$\frac{rt - s^2}{R(p, q)} = f(x, y, z, p, q),$$

где  $R(p, q)$  отлична от  $(1 + p^2 + q^2)^\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ).

Воронежский государственный  
университет

Поступило  
22 XI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> И. Я. Бакельман, ДАН, **114**, № 6 (1957). <sup>2</sup> А. В. Погорелов, Матем. сборн., **31**, в. 1, 88 (1952). <sup>3</sup> И. Я. Бакельман, Первая краевая задача для нелинейных эллиптических уравнений, Диссертация, Ленинградск. гос. пед. инст. им. А. И. Герцена, 1960. <sup>4</sup> М. А. Красносельский, Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, 1956. <sup>5</sup> М. А. Красносельский, ДАН, **132**, № 3 (1960). <sup>6</sup> И. Я. Бакельман, ДАН, **126**, № 5 (1959).

Ф. А. БЕРЕЗИН и Л. Д. ФАДДЕЕВ

# ЗАМЕЧАНИЕ ОБ УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 25 XI 1960)

1. В некоторых задачах квантовой механики возникает необходимость рассмотрения уравнения Шредингера вида

$$-\Delta\psi + \varepsilon\delta(x)\psi = E\psi, \quad (1)$$

где  $\delta(x)$  —  $\delta$ -функция Дирака.

Решение уравнения (1) вызывает известные трудности, связанные с тем, что выражение

$$H = -\Delta + \varepsilon\delta(x) \quad (2)$$

не является оператором в гильбертовом пространстве: в случае, если  $\psi(0) = 0$ ,  $H\psi = -\Delta\psi$ ; в случае, если  $\psi(0) \neq 0$ ,  $H\psi$  не принадлежит гильбертову пространству ни при каком  $\psi$ .

Целью настоящей заметки является придание математического смысла физическим работам, посвященным уравнению (1) (см., например, <sup>(1)</sup>).

2. Воспроизведем прежде всего встречающееся в физических работах решение уравнения (1). С этой целью рассмотрим семейство ядер  $u_N(x, y)$  такое, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} u_N(x, y) = \delta(x)\delta(y). \quad (3)$$

Кроме того, параметр  $\varepsilon$  также предположим зависящим от  $N$ . Заменяем теперь уравнение (1) уравнением

$$-\Delta\psi + \varepsilon(N) \int u_N(x, y)\psi(y) d^3y = E\psi. \quad (N)$$

Для решения уравнения (N) совершим преобразование Фурье. В результате получим

$$\begin{aligned} p^2\tilde{\psi} + \frac{\varepsilon(N)}{8\pi^3} \int \tilde{u}_N(p, q)\tilde{\psi}(q) d^3q &= E\tilde{\psi}; \\ \tilde{u}_N(p, q) &= \int e^{i(qy - px)} u_N(x, y) d^3x d^3y. \end{aligned} \quad (\tilde{N})$$

Функция  $\tilde{u}_N(p, q)$  удовлетворяет, очевидно, требованию

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{u}_N(p, q) = 1. \quad (3')$$

Так как семейство ядер  $u_N(x, y)$  выбрано с единственным условием (3) или, что то же самое, (3') и окончательный результат дальнейших вычислений не должен зависеть от выбора семейства  $u_N$ , выберем  $u_N$  так, чтобы

$$\tilde{u}_N(p, q) = \chi_N(p)\chi_N(q); \quad \chi_N(p) = \begin{cases} 1 & \text{при } p^2 < N^2, \\ 0 & \text{при } p^2 > N^2. \end{cases} \quad (4)$$

Если воспользоваться выражением (4) для  $\tilde{u}_N$ , то уравнение ( $\tilde{N}$ ) легко решить. Собственные функции, принадлежащие к непрерывному спектру, оказываются равными:

$$\tilde{\psi}_N^+(p, s) = \delta(p - s) - \frac{\varepsilon'(N)}{1 + \varepsilon'(N) \int \frac{\chi_N^2(p) d^3p}{p^2 - s^2 - i0}} \frac{\chi_N(p) \chi_N(s)}{p^2 - s^2 - i0}. \quad (5)$$

$$s^2 = E, \quad \varepsilon' = \frac{\varepsilon(N)}{8\pi^3}.$$

Далее:

$$\int \frac{\chi_N^2(p) d^3p}{p^2 - s^2 - i0} = 4\pi \int_0^N \frac{p^2 dp}{p^2 - s^2 - i0} = 4\pi \left( N + \frac{|s|}{2} \left( -\pi i + \ln \frac{N - |s|}{N + |s|} \right) \right). \quad (6)$$

Из (5) и (6) ясно, что для того, чтобы функция  $\tilde{\psi}_N^+$  имела нетривиальный предел при  $N \rightarrow \infty$ , следует положить

$$\varepsilon'(N) = \frac{\alpha}{1 - 4\pi\alpha N},$$

где  $\alpha$  — произвольная константа.

При этом предел  $\tilde{\psi}_N^+$  при  $N \rightarrow \infty$  оказывается равным

$$\tilde{\psi}^+ = \delta(p - s) - \frac{\alpha}{1 - 2\pi^2 i \alpha |s|} \frac{1}{p^2 - s^2 - i0}. \quad (7)$$

3. Рассмотрим преобразование Фурье выражения (2):

$$\tilde{H}\psi = p^2\psi + \varepsilon' \int \psi d^3p. \quad (8)$$

Если интеграл  $\int \psi d^3p = 0$ , то  $\tilde{H}\psi = p^2\psi$ .

Обозначим через  $D_L$  множество функций, для которых

$$\int p^4 |\psi|^2 d^3p < \infty, \quad \int \psi d^3p = 0.$$

Через  $L$  обозначим определенный в  $D_L$  оператор умножения на  $p^2$ .

Оказывается, что оператор  $L$  является замкнутым симметрическим оператором с индексами дефекта (1,1).

Используя общую теорию расширений (см., например, (2)), нетрудно построить все расширения оператора  $L$ . Легко проверить, что все эти расширения задаются формулой

$$H_\alpha \psi = p^2 \psi + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{1 - 4\pi\alpha N} \int \chi_N(p) \psi(p) d^3p, \quad (9)$$

где  $\psi(p)$  — функция, обладающая свойствами:

$$\int \chi_N(p) \psi(p) d^3p = c(1 - 4\pi\alpha N) + o(1), \quad \int |H_\alpha \psi|^2 d^3p < \infty. \quad (9')$$

Обратим внимание на то, что при  $\alpha \neq 0$  равенство (9) можно заменить на

$$H_\alpha \psi = p^2 \psi - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi N} \int \chi_N(p) \psi(p) d^3p.$$

Таким образом, при  $\alpha \neq 0$  зависимость  $H_\alpha$  от  $\alpha$  проявляется только как зависимость от  $\alpha$  области определения  $H_\alpha$ .

Проверим, что собственные функции непрерывного спектра  $H_\alpha$  задаются формулой (7). Построим с этой целью резольвенту оператора  $H_\alpha$ . Пусть  $(H_\alpha - z)f = g$ . Тогда <sup>(2)</sup>

$$f(p) = \frac{g(p)}{p^2 - z} + \frac{M}{p^2 - z}. \quad (10)$$

Для того чтобы определить  $M$ , воспользуемся тем, что  $f(p)$  удовлетворяет условию (9'). Из (10) имеем:

$$\int f(p) \chi_N(p) d^3p = \int \frac{\chi_N(p) g(p)}{p^2 - z} d^3p + \\ + M \cdot 4\pi \left[ N + \frac{\sqrt{z}}{2} \left( \pi i \operatorname{sign} \operatorname{Im} \sqrt{z} + \ln \frac{N - \sqrt{z}}{N + \sqrt{z}} \right) \right].$$

С другой стороны, из (9') получаем, что

$$\int f(p) \chi_N(p) d^3p = c(1 - 4\pi\alpha N) + o(1).$$

Сравнивая два последние выражения, получаем, во-первых, что  $M = -\alpha c$  и, во-вторых, что

$$\int \frac{\chi_N(p) g(p)}{p^2 - z} d^3p - 4\pi\alpha c \frac{\sqrt{z}}{2} \pi i \operatorname{sign} \operatorname{Im} \sqrt{z} - c \rightarrow 0.$$

Отсюда

$$c = \frac{\int \frac{g(p) d^3p}{p^2 - z}}{1 + 2\pi^2 \alpha i \sqrt{z} \operatorname{sign} \operatorname{Im} \sqrt{z}}.$$

Таким образом,

$$f(p) = \frac{g(p)}{p^2 - z} - \frac{\alpha}{1 + 2\pi^2 i \alpha \sqrt{z} \operatorname{sign} \operatorname{Im} \sqrt{z}} \frac{1}{p^2 - z} \int \frac{g(q) d^3q}{q^2 - z}.$$

Отсюда находим ядро резольвенты

$$G(p, q, z) = \frac{\delta(p - q)}{p^2 - z} - \frac{\alpha}{1 + 2\pi^2 i \alpha \sqrt{z} \operatorname{sign} \operatorname{Im} \sqrt{z}} \frac{1}{(p^2 - z)(q^2 - z)}. \quad (11)$$

Используя формулу (11), легко получить собственные функции непрерывного спектра:

$$\psi_+(p, s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{i} \varepsilon G(p, s, s^2 + i\varepsilon).$$

Выполняя предельный переход, получаем выражение (7) для собственной функции.

Используя выражение для  $\psi_+(p, s)$  и аналогичное выражение для  $\psi_-$ , можно построить оператор рассеяния по формуле  $S(s_1, s_2) = \int \psi_+(p, s_1) \times \times \psi_-(p, s_2) d^3p$ . В результате вычислений получается результат, указанный в <sup>(1)</sup>.

4. Нетрудно получить выражение для  $H_\alpha$  в  $x$ -представлении:

$$H_\alpha f = -\Delta f + \alpha \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - 4\pi\alpha N} \frac{\sin N|x|}{|x|} \int \frac{\sin N|y|}{|y|} f(y) d^3y. \quad (12)$$

Область определения  $H_x$  состоит из функций, удовлетворяющих условию

$$\int \frac{\sin N|x|}{|x|} f(x) d^3x = c(1 - 4\pi\epsilon N) + o(1), \quad \int |H_x f|^2 d^3x < \infty. \quad (12')$$

Таким образом, математическое содержание обработки физиками уравнения (1) состоит в замене выражения (2) оператором (12), (12'), являющимся расширением оператора  $-\Delta$  с области определения, состоящей из функций  $f(x)$ , для которых  $f(0) = 0$ , на область, состоящую из функций, удовлетворяющих условию (12').

Поступило  
24 XI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ, 38, в. 3, 819 (1960). <sup>2</sup> Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., 1950.

А. А. ВАШАРИН и П. И. ЛИЗОРКИН

# НЕКОТОРЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С СИЛЬНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ НА ГРАНИЦЕ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 25 XI 1960)

Для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ y^k \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ y^k \frac{\partial u}{\partial y} \right] = 0, \quad (1)$$

рассматриваемого в ограниченной односвязной области  $G$  с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ , содержащей отрезок  $\Gamma_0$  оси  $Ox$ , постановка краевых задач существенно зависит от величины  $k$ . Из результатов М. В. Келдыша <sup>(1)</sup> следует, что в классе непрерывных граничных данных и ограниченных в  $\bar{G}$  решений для уравнения (1) однозначно разрешима или задача Дирихле при  $k < 1$ , или задача Е при  $k > 1$  (при которой отрезок  $\Gamma_0$  освобождается от граничных условий). Аналогичные результаты были получены другими авторами (см. монографию <sup>(2)</sup> и библиографию к ней), исходя из вариационной трактовки соответствующих задач. В данной работе мы исследуем другие постановки краевых задач для уравнений типа (1), берущие свое начало от А. В. Бицадзе <sup>(3)</sup>.

В области  $G$  упомянутого вида рассмотрим уравнение

$$L(u) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sigma^k(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \sigma^k(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right] = 0, \quad (2)$$

где  $\sigma(x, y)$  — достаточно гладкая положительная функция, подчиненная оценке

$$c_1 y < \sigma(x, y) < c_2 y, \quad c_1, c_2 > 0.$$

Таким образом, уравнение (2) вырождается на отрезке  $\Gamma_0$ . Мы называем вырождение сильным (слабым) при  $k \geq 1$  ( $k < 1$ ); случай  $k = 1$  будем называть также критическим. Пусть сначала  $k > 1$ .

**Задача А.** Найти дважды непрерывно дифференцируемое в области  $G$  решение  $u(x, y)$  уравнения (2), принимающее в среднем на границе  $\Gamma$  значения

$$\lim_{(x, y) \rightarrow M \in \Gamma} [\sigma^{k-1}(x, y) u(x, y)] = \varphi(M). \quad (3)$$

**Теорема 1.** Пусть  $\Gamma$  не касается оси  $Ox$  и не содержит вырожденных углов. Если  $1 < k < 2$ , функция  $\sigma(x, y)$  четырежды ограничено дифференцируема и  $\Delta \sigma \geq 0$ , то задача А имеет единственное решение при выполнении требований

$$а) \varphi(M) \in L_2(\Gamma); \quad б) \int_{\Gamma} ds_M \int_{\Gamma} \frac{|\varphi(M) - \varphi(Q)|^2}{|MQ|^2} \omega^{2-k}(M, Q) ds_Q < \infty, \quad (4)$$

где  $\omega(M, Q)$  равно расстоянию  $|MQ|$  между точками  $M$  и  $Q$ , если хотя бы одна из этих точек находится на  $\Gamma_0$ , и равно меньшему из расстояний этих точек до оси  $Ox$  в противном случае.

Для доказательства рассматривается вспомогательный функционал

$$I(v) = \iint_G \left\{ \sigma^{2-k} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + (k-1) \Delta \sigma \cdot \sigma^{1-k} v^2 \right\} dx dy \quad (5)$$

в классе  $W(\varphi)$  функций из  $W_{2,2-k}^{(1)}$  (см. (2)), принимающих на границе заданные значения  $\varphi(M)$ . Условия (4) представляют собой характеристику (необходимый и достаточный признак) граничных значений функций из  $W_{2,2-k}^{(1)}$ , и потому класс  $W(\varphi)$  не пуст. На основании обычных для вариационного метода рассуждений (4) мы убеждаемся в существовании единственного минимизирующего функционала  $I(\varphi)$  элемента  $v_0 \in W(\varphi)$ . Функция  $v_0$  оказывается, в силу условий теоремы, дважды непрерывно дифференцируемой (2), удовлетворяет уравнению Эйлера — Лагранжа функционала (5) и в среднем квадратичном краевому условию

$$\lim_{(x,y) \rightarrow M \in \Gamma} v_0(x,y) = \varphi(M).$$

Из теоремы единственности работы (5) (стр. 263) следует, что другого решения с указанными свойствами быть не может. Непосредственной проверкой можно убедиться теперь, что функция  $u_0 = v_0/\sigma^{k-1}$  удовлетворяет уравнению (2) и является решением задачи А. Можно утверждать, кроме того, что для функции  $u_0$  конечен интеграл  $I(\sigma^{k-1}u_0)$  \*. Теорема доказана.

Отметим, что ограничения  $k < 2$  и на  $\sigma$  вызваны у нас методом доказательства. Задача А имеет смысл и в более широких предположениях, в частности в случае сильного вырождения вдоль всей границы. В качестве полезного примера рассмотрим задачу А для уравнения (1) в полуплоскости  $y > 0$ . После замены  $y^{k-1}u = v$  уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( y^{2-k} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( y^{2-k} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0,$$

и решение поставленной задачи при всех  $k > 1$  дается формулой

$$u_0(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(k/2)}{\Gamma((k-1)/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{[(x-\xi)^2 + y^2]^{k/2}}. \quad (6)$$

Единственность этого решения при  $1 < k < 3$  можно получить из требования конечности  $D_{2-k}(y^{k-1}u_0)$ ; при этом граничная функция  $\varphi(x)$  должна браться из  $W_2^{(k-1)/2}(-\infty, \infty)$ . Эти утверждения немедленно следуют из результатов работы (6).

Интересен случай критического вырождения  $k = 1$ . Мы ради простоты ограничимся случаем  $\sigma \equiv y$  и поставим задачу следующим образом:

Задача Б. Найти в области  $G$  дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения

$$L_1(u) = y \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

принимаящее на границе области в среднем значения

$$\left[ \frac{1}{\ln \frac{M}{y}} u(x,y) \right]_{(x,y) \rightarrow P \in \Gamma} = \varphi(P)$$

и обладающее конечным интегралом

$$\iint_G y \ln^2 \frac{M}{y} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\ln \frac{M}{y}} u \right) \right]^2 + \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\ln \frac{M}{y}} u \right) \right]^2 \right\} dx dy,$$

где  $M$  — константа, превосходящая диаметр области.

\* Если заранее требовать от решения конечности интеграла  $I(\sigma^{k-1}u)$ , то условия (4) однозначной разрешимости задачи А являются не только достаточными, но и необходимыми.

Пусть область  $G$  удовлетворяет тем же требованиям, что и в теореме 1, и  $\omega(P, Q)$  имеет тот же смысл.

Теорема 2. Для того чтобы задача Б имела решение, необходимо и достаточно, чтобы граничная функция  $\varphi(P)$  удовлетворяла условиям

$$a) \varphi(P) \in L_2(\Gamma); \quad б) \int_{\Gamma} ds_P \int_{\Gamma} \frac{|\varphi(P) - \varphi(Q)|^2}{|PQ|^2} \omega(P, Q) ds_Q < \infty. \quad (7)$$

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$D(v, G) = \iint_G y \ln^2 \frac{M}{y} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (8)$$

на классе  $\hat{D}(G)$  функций, для которых он определен и конечен. Прежде всего мы устанавливаем, что функция  $v(x, y) \in \hat{D}(G)$  обладает в смысле сходимости в среднем граничным значением  $F(P)$  со свойствами (7), и, наоборот, функция  $F(P)$ , заданная на  $\Gamma$  и обладающая свойствами (7), может быть продолжена на  $G$  в весовом классе  $\hat{D}(G)$ . Это делается по схемам, указанным в работе (7), лишь вместо неравенства Харди используется неравенство

$$\left| \int_0^a \frac{dx}{x} \right| \left| \int_0^x f(t) dt \right|^p \leq p^p \int_0^a x^{p-1} \ln^p \frac{M}{x} |f(x)|^p dx, \quad p \geq 1, M \geq a.$$

Затем рассматривается задача на отыскание функции  $v_0$  из  $\hat{D}(G)$ , обладающей граничным значением  $\varphi(P)$ , на которой функционал (8) достигает наименьшего значения. Подобно тому, как это делалось в теореме 1, доказывается существование единственной функции  $v_0$  с указанными свойствами и так же как и там устанавливается, что функция  $u_0 = \ln \frac{M}{y} \cdot v_0$  является единственным решением задачи Б.

Заметим, что в случае полукруга  $\{x^2 + y^2 < R^2, y > 0\}$  решение задачи Б можно выписать в явном виде, пользуясь функцией Грина оператора  $L_1(u)$ :

$$\Gamma(x, y; \xi, \eta) = g(x, y; \xi, \eta) - \frac{R}{\rho} g(x, y; \xi^*, \eta^*),$$

$$g(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\ln \frac{M}{y} \ln \frac{M}{\eta}} \int_0^\pi \frac{d\alpha}{[(x - \xi)^2 + y^2 + \eta^2 - 2y\eta \cos \alpha]^{1/2}},$$

$$\frac{\xi^*}{\xi} = \frac{\eta^*}{\eta} = \frac{R^2}{\rho^2}, \quad \rho^2 = \xi^2 + \eta^2.$$

Потом предельным переходом можно получить решение задачи Б в полуплоскости в виде

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t) dt}{[(x - t)^2 + y^2]^{1/2}}. \quad (9)$$

Легко проверить, что для непрерывных функций  $\varphi(x)$ , достаточно быстро исчезающих на бесконечности, функция (9) удовлетворяет условию

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{u(x, y)}{\ln(1/y)} = \varphi(x).$$

Приведенные примеры дают повод к следующему замечанию. Известно, что функция (9) представляет собой пространственный потенциал зарядов, распределенных на оси  $Ox$  с плотностью  $\varphi(x)$  (при этом следует

рассматривать  $y$  как расстояние до оси  $Ox$ ). Точно так же, интерпретируя при  $k > 1$  уравнение (1) как уравнение распространения тепла с коэффициентом теплопроводности  $y^\alpha$  ( $k = 1 + \alpha$ ), можно истолковать формулу (6) как стационарное распределение температуры в пространстве, создаваемое источниками, распределенными по оси  $Ox$  с плотностью  $\varphi(x)$ . Следовательно, рассмотренные здесь постановки краевых задач позволяют выделять сингулярные на границе решения соответствующих уравнений и имеют простой физический смысл.

Московский инженерно-физический  
институт

Поступило  
11 XI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> М. В. Келдыш, ДАН, 77, № 2 (1951). <sup>2</sup> Л. Д. Кудрявцев, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 55 (1959). <sup>3</sup> А. В. Бицадзе, Уравнения смешанного типа, М., 1959. <sup>4</sup> А. А. Васьшин, Изв. АН СССР, сер. матем., 23, 421 (1959). <sup>5</sup> E. Mageres, Ann. mat. pura et appl., 48, 257 (1959). <sup>6</sup> П. И. Лизоркин, ДАН, 126, № 4 (1959). <sup>7</sup> П. И. Лизоркин, ДАН, 134, № 4 (1960).

Б. Б. ВЕНКОВ

# КОГОМОЛОГИИ ГРУПП ЕДИНИЦ В АЛГЕБРАХ С ДЕЛЕНИЕМ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 18 XI 1960)

Пусть  $\mathfrak{A}$  — алгебра с делением ранга  $n > 1$  над полем рациональных чисел  $Q$ , пусть  $J = [\tau_1, \dots, \tau_n]$  — максимальный порядок в  $\mathfrak{A}$  и  $G$  — группа единиц в  $J$  нормы  $+1$ . Целью настоящей заметки является доказательство следующего свойства периодичности когомологий группы  $G$ :

Для любого  $G$ -модуля  $A$  и всех достаточно больших  $k$  имеет место изоморфизм

$$H^k(G, A) \approx H^{n+k}(G, A) \quad (1)$$

(более точно см. теорему 1).

1. Доказательство (1) основано на теории  $G$ -пучков Гротендика<sup>(1)</sup>. Пусть  $X$  — топологическое пространство с группой преобразований  $G$ ;  $Y$  — фактор-пространство  $X/G$  и  $f: X \rightarrow Y$  — каноническое отображение. Обозначим через  $C^{X(G)}$  (соответственно  $C^Y$ ) абелеву категорию  $G$ -пучков абелевых групп над  $X$  (соответственно пучков абелевых групп над  $Y$ ). Обозначим через  $\Gamma^G$  функтор, сопоставляющий  $G$ -пучку  $A$  группу его  $G$ -инвариантных сечений над  $X$ , и через  $f_*^G$  — функтор из  $C^{X(G)}$  в  $C^Y$ , задаваемый формулой  $(f_*^G A)V = (A(f^{-1}(V)))^G$ . Правые производные функтора  $\Gamma^G$  обозначим через  $H^p(X; G, A)$ , правые производные  $f_*^G$  — через  $\mathcal{H}^p(G, A)$ . Функтор  $\Gamma^G$  можно двумя способами разложить в композицию функторов  $\Gamma^G = (\Gamma_X)^G = \Gamma_Y(f_*^G)$ . Это дает два спектральных функтора, сходящихся к  $H^n(X; G, A)$ , вторые члены которых соответственно равны  $I_2^{p,q} = H^p(Y, \mathcal{H}^q(G, A))$  и  $II_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X, A))$ . Пусть даны три  $G$ -пучка  $A, B, C$  и  $\cup$ -произведение  $A \otimes B \rightarrow C$ , совместимое с  $G$ -структурами на  $A, B, C$ . Структура произведения может быть естественным образом продолжена на производные функторы функторов  $\Gamma^G$  и  $f_*^G$ . Это дает отображения  $H^p(X; G, A) \otimes H^q(X; G, B) \rightarrow H^{p+q}(X; G, C)$  и  $\mathcal{H}^p(G, A) \otimes \mathcal{H}^q(G, B) \rightarrow \mathcal{H}^{p+q}(G, C)$ , обладающие обычными свойствами произведений. В дальнейшем нас будет особенно интересовать случай, когда  $G$  дискретна на пространстве  $X$ , в этом случае для любой точки  $y \in Y$

$$\mathcal{H}^p(G, A)_{(y)} \overset{\theta_y}{\approx} H^p(G_x, A), \quad (2)$$

где  $x \in f^{-1}(y)$ ,  $G_x$  — стабилизатор точки  $x$ . Этот изоморфизм переводит структуру произведения в  $\mathcal{H}^*(G, )_{(y)}$  в обычное умножение в группах когомологий групп.

Произведение  $A \otimes B \rightarrow C$  переносится также естественным образом и на спектральные последовательности  $I$  и  $II$ . А именно, определены отображения  $I_r^{p,q}(A) \otimes I_r^{p',q'}(B) \rightarrow I_r^{p+p',q+q'}(C)$ , совместимые со структурами дифференциальных групп на  $I_r$  и совместимые со структурой произведения

в предельном члене. Кроме того, на  $I_2$  это произведение с точностью до знака совпадает с естественным произведением, имеющимся в  $H^*(Y, \mathcal{H}^*(G))$ . Аналогично и для второй спектральной последовательности.

Отметим еще следующее свойство натуральности рассматриваемых функторов. Пусть  $\Pi$  — подгруппа группы  $G$ ;  $Y'$  — фактор-пространство  $X$  по  $\Pi$ ;  $I'$  и  $II'$  — спектральные последовательности  $I$  и  $II$ , рассматриваемые по отношению к  $\Pi$ . Вложение  $\Pi \subset G$  индуцирует гомоморфизм спектральных последовательностей  $I \rightarrow I'$  и  $II \rightarrow II'$ , совпадающий на  $I_2$  и  $II_2$  с естественными гомоморфизмами, например на  $II_2$  с гомоморфизмом ограничения.

2. Вернемся к доказательству (1). Итак,  $\mathfrak{A}$  — алгебра с делением,  $J = [\tau_1, \dots, \tau_n]$  — ее максимальный порядок;  $G$  — группа собственных единиц в  $J$  (нормы  $\neq 1$ ). Обозначим через  $x \rightarrow A_x$ ,  $x \in \mathfrak{A}$  — левое регулярное представление алгебры  $\mathfrak{A}$  в базисе  $\tau_1, \dots, \tau_n$ . Так как  $\mathfrak{A}$  не имеет делителей нуля, то все матрицы  $A_x$ ,  $x \in \mathfrak{A}$ ,  $x \neq 1$ , не имеют  $+1$  в качестве собственного значения и, в частности, группа  $G$  действует без неподвижных точек в пространстве  $X = \mathfrak{A} \otimes R - (0)$  ( $R$  — поле вещественных чисел).

Лемма. Пусть  $\pi$  — конечная подгруппа порядка  $s$  группы  $G$ ; тогда

$$H^n(\pi, Z) = Z/sZ.$$

Кроме того, в  $H^n(G, Z)$  найдется элемент  $\xi$  такой, что для всех конечных подгрупп  $\pi \subset G$   $i(G, \pi)\xi$  является образующим циклической группы  $H^n(\pi, Z)$  ( $i(G, \pi)$  — гомоморфизм ограничения).

Пусть  $II$  и  $II'$  — спектральные последовательности для пар  $(G, X)$  и  $(\pi, X)$  с постоянным пучком коэффициентов  $Z$ . Пространство  $X$  является гомологической сферой  $S^{n-1}$ , и поэтому в этих спектральных последовательностях имеется лишь один нетривиальный дифференциал  $d_n^{p, n-1}: II_n^{p, n-1} \rightarrow II_n^{p+n, 0}$  ( $d_n^{p, n-1}: II_n^{p, n-1} \rightarrow II_n^{p+n, 0}$ ). Первая часть леммы следует из того, что группа  $\pi$  дискретна на  $X$  (так как она конечна) и преобразования из  $G$  сохраняют ориентацию пространства  $X$ , при этом  $d_n^{0, n-1}(1)$  является образующим элементом для  $H^n(\pi, Z)$ . В качестве элемента  $\xi \in H^n(G, Z)$  можно взять  $d_n^{0, n-1}(1)$ ; действительно, если обозначить через  $h$  гомоморфизм спектральных последовательностей  $II \rightarrow II'$ , индуцированный вложением  $\pi \subset G$ , то будем иметь

$$hd_n^{0, n-1}(1) = d_n^{0, n-1}(1),$$

но на  $II_2^{p, 0}$   $h$  совпадает с гомоморфизмом ограничения.

Обозначим через  $\cup: H^p(G, Z) \otimes H^q(G, A) \rightarrow H^{p+q}(G, A)$  произведение, индуцированное произведением  $Z \otimes A \rightarrow A$ ,  $1 \otimes a \rightarrow a$ .

Теорема 1. Пусть  $G$  — группа собственных единиц в  $\mathfrak{A}$ ;  $n$  — ранг  $\mathfrak{A}$  над полем рациональных чисел  $Q$ ;  $A$  — произвольный  $G$ -модуль. В группе  $H^n(G, Z)$  найдется элемент  $\xi$  такой, что для любого  $k \geq n(n+1)/2$  умножение на  $\xi$  является изоморфизмом

$$H^k(G, A) \approx H^{n+k}(G, A).$$

Доказательство. Докажем следующее более общее утверждение. Пусть  $G$  — дискретная подгруппа группы  $GL(n, R)$ , состоящая из матриц определителя  $\neq 1$ , и пусть для  $G$  выполняется утверждение леммы, тогда для  $G$  справедлива теорема 1.

Обозначим через  $\mathfrak{P}_n$  пространство вещественных положительных квадратичных форм от  $n$  переменных, а через  $X$  — дискриминантную поверхность в  $\mathfrak{P}_n$ , т. е. множество  $f \in \mathfrak{P}_n$  с  $\det f = 1$ . Из наших предположений о  $G$  вытекает, что  $G$  дискретно действует на  $X$ . Обозначим

через  $Z$  и  $A$  постоянные пучки над  $X$  со слоем  $Z$  и  $A$  и рассмотрим спектральные последовательности  $I(Z)$  и  $I(A)$  для пары  $(G, X)$ . Прежде всего ясно, что они сходятся к  $H^*(G, Z)$  и  $H^*(G, A)$ , так как пространство  $X$  стягиваемо в точку. Гомоморфизм  $\varphi: H^q(G, Z) \rightarrow \Gamma_Y(\mathcal{H}^q(G, Z))$ , получаемый из спектральной последовательности  $I$ , устроен следующим образом: если  $\eta \in H^q(G, Z)$ , то для любой точки  $y \in Y$   $\varphi$  для слоя над точкой  $y$  совпадает с гомоморфизмом ограничения, если  $\mathcal{H}^q(G, Z)_{(y)}$  отождествить с  $H^q(G_x, Z)$ ,  $x \in f^{-1}(y)$  при помощи изоморфизма (2),  $(\varphi\eta)(y) = \theta_y^{-1} i(G, G_x) \eta$ . Таким образом, если  $\eta \in H^q(G, Z)$ , то функция  $\psi(\eta): y \rightarrow \theta_y^{-1} i(G, G_x) \eta$  принадлежит  $I_2^{0,q}(Z)$  и  $d_r^{0,q} \psi = 0$  при  $r = 2, 3, \dots$ . Пусть  $\xi \in H^n(G, Z)$  — элемент, удовлетворяющий заключению леммы;  $\psi(\xi) \in I_r^{0,n}(Z)$ ,  $r \geq 2$ ; посмотрим, как ведет себя спектральная последовательность  $I(A)$  при умножении на  $\psi(\xi)$ . Докажем, что умножение на  $\psi(\xi)$  является изоморфизмом

$$I_r^{p,q}(A) \rightarrow I_r^{p,q+n}(A), \quad q \geq \frac{n(n+1)}{2} \quad (3)$$

для всех  $r \geq 2$ . Так как  $d_r^{0,n} \psi(\xi) = 0$  при  $r \geq 2$ , то это достаточно доказать для  $r = 2$ . В этом случае отображение (3) превращается в гомоморфизм

$$H^p(Y, \mathcal{H}^q(G, A)) \rightarrow H^p(Y, \mathcal{H}^{q+n}(G, A)),$$

индуцированный умножением коэффициентов на  $\psi(\xi)$ ; поэтому достаточно доказать, что умножение на  $\psi(\xi)$  является изоморфизмом пучков

$$\mathcal{H}^q(G, A) \rightarrow \mathcal{H}^{q+n}(G, A), \quad q > 0.$$

Пусть  $y \in Y$ ; тогда преобразование  $\theta_y$  переводит  $\alpha_y$  в умножение на  $i(G, G_x) \xi$ ,

$$H^q(G_x, A) \xrightarrow{\theta_y \alpha_y \theta_y^{-1}} H^{q+n}(G_x, A), \quad q > 0.$$

По лемме,  $G_x$  является конечной группой с  $H^n(G_x, Z) = Z \setminus (\text{ord } G_x) Z$  но тогда  $G_x$  — периодическая группа в смысле Картана — Эйленберга <sup>(2)</sup> и так как  $i(G, G_x) \xi$  является образующей для  $H^n(G_x, Z)$  то из <sup>(2)</sup> следует, что умножение на этот элемент есть изоморфизм для любого модуля  $A$ . Итак, (3) является изоморфизмом.

Пространство  $Y$  является клеточным комплексом размерности  $n(n+1)/2 - 1$ , поэтому  $I_\infty^{p,q} = 0$  при  $p \geq n(n+1)/2$ . Вместе с изоморфизмами (3) для  $r = \infty$  это показывает, что при  $k \geq n(n+1)/2$  умножение на  $\xi$  является изоморфизмом групп, ассоциированных с фильтрованными группами  $H^k(G, A)$  и  $H^{k+n}(G, A)$ , а тогда и сами эти группы изоморфны. Теорема доказана.

**Замечание.** Из доказательства следует, что  $H^k(G, A) = 0$  при  $k \geq n(n+1)/2$ , если  $A$  является векторным пространством над полем характеристики 0 (или взаимно простой с порядками конечных подгрупп группы  $G$ ).

Ленинградское отделение  
Математического института им. В. А. Стеклова  
Академии наук СССР

Поступило  
12 XI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> A. Grothendieck, Tohoku Math. J., 9, 2/3, 119 (1957) <sup>2</sup> H. Cartan, S. Eilenberg, Homological Algebra, Princeton, 1956.

В. М. ВОЛОСОВ

# О ВЫСШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ПРИ УСРЕДНЕНИИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 17 XI 1960)

§ 1. Постановка задачи. В <sup>(3)</sup> разработан метод усреднения для систем

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, y, t, \varepsilon), \quad \dot{y} = Y(x, y, t, \varepsilon) \quad (1)$$

( $x, X$  —  $n$ -мерные,  $y, Y$  —  $m$ -мерные векторы,  $\varepsilon > 0$  — малый параметр). При  $\varepsilon = 0$  (1) переходит в вырожденную систему

$$\dot{y} = Y_0(x, y, t) \equiv Y(x, y, t, 0), \quad x = \text{const}, \quad (2)$$

общее решение которой считается известным:

$$y = \varphi(x, y_0, t_0, t) \quad (\varphi(x, y_0, t_0, t_0) \equiv y_0). \quad (3)$$

Предполагается, что правые части (1) и некоторые другие функции имеют средние значения вдоль траекторий (3): за среднее значение функции  $F(x, y_0, t_0, y, t)$  принимается  $\bar{F}(x) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (F|_{y=\varphi(x, y_0, t_0, t)}) dt$

(далее всюду предполагается, что  $\bar{F}(x)$  непрерывна и удовлетворяет условию Липшица), причем предел существует равномерно относительно  $x, y_0, t_0$  в рассматриваемой области и не зависит от  $y_0, t_0$ . (В <sup>(3)</sup> показано, что предположение о независимости от  $y_0, t_0$  не ограничивает общности.) В <sup>(3)</sup> доказано, что при некоторых условиях решение  $x$  системы (1) аппроксимируется с погрешностью  $\alpha(\varepsilon)$  ( $\alpha(\varepsilon)$  здесь и далее обозначает величины, для которых  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon) = 0$ ) на интервале

$t \sim 1/\varepsilon$  решением усредненной системы первого приближения  $\dot{\bar{x}} = \varepsilon \bar{X}_1(\bar{x})$  ( $X_1(x, y, t) \equiv X(x, y, t, 0)$ ).

В данной статье рассматривается усредненная система второго приближения

$$\dot{\bar{x}} = \varepsilon \bar{X}_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 A_2(\bar{x}), \quad \dot{\bar{y}} = Y_0(\bar{x}, \bar{y}, t) + \varepsilon B_1(\bar{x}), \quad (4)$$

выведенная в <sup>(3)</sup> ( $A_2, B_1$  указаны далее). Доказывается, что при некоторых условиях решения (4) аппроксимируют решения (1) с погрешностью  $\varepsilon \alpha(\varepsilon)$  для  $x$  и  $\alpha(\varepsilon)$  для  $y$  на интервале  $t \sim 1/\varepsilon$ .

§ 2. Теоремы о высших приближениях. Область задания (1):  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ;  $x, y, t \in G$ ,  $G$  — открытая область.

Пусть:

1)  $X, Y$  — ограничены, непрерывны и имеют непрерывные равномерно ограниченные производные по  $x, y, t$ , а по  $\varepsilon$  имеют производные до второго порядка включительно, причем  $X''_{\varepsilon^2}, Y''_{\varepsilon^2}$  равномерно ограничены.

2) Через каждую точку области  $G$  проходит единственная интегральная кривая (3) системы (2), лежащая в  $G$  при  $t_0 \leq t < \infty$ , продолжимая для  $t \leq t_0$  до границы  $G$  или до  $t > -\infty$ . Функция (3) непрерывна, имеет по  $y_0, t_0$  непрерывные ограниченные производные до второго порядка включительно.  $0 < c_1 \leq |\text{Det } D| \leq c_2 < \infty$ , где  $D \equiv \partial \Phi / \partial y_0$  (здесь и далее  $\partial \Phi / \partial y_0, \partial Y / \partial y$  и т. п. обозначают матрицы  $\|\partial \Phi_i / \partial y_{0k}\|, \|\partial Y_i / \partial y_k\|$  и т. п.).

3) В  $G$  лежит  $(n+m)$ -мерное многообразие  $M$ , заданное параметрически:  $x = a(\lambda), y = b(\lambda), t = c(\lambda)$  ( $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n+m}\} \in \Lambda, \Lambda$  — открытая область).  $a, b, c$  непрерывны и имеют непрерывные ограниченные производные;  $\sum_{i=1}^{n+m+1} A_i^2 \geq \text{const} > 0$ , где  $A_i$  — миноры  $(n+m)$ -го порядка матрицы  $\|\partial a / \partial \lambda, \partial b / \partial \lambda, \partial c / \partial \lambda\|$ . Абсолютные величины углов пересечения (3) с  $M$  ограничены снизу положительной константой. Всякая кривая (3) из  $G$  пересекает  $M$  один раз.

4) Существует среднее значение  $\bar{X}_1$  функции  $X_1$  (здесь и далее подразумеваются средние значения в смысле определения § 1). Функция  $S \equiv X_1 - \bar{X}_1$  равномерно ограничена.

5) Для  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  существуют открытые ограниченные подобласти  $G_0(\varepsilon) \subseteq G$ , содержащие фиксированную начальную точку  $x_0, y_0, t_0$  вместе с некоторой  $\rho$ -окрестностью ( $\rho = \text{const} > 0$ ). Время перехода кривой (3) из любой точки  $G_0$  до пересечения с  $M$  не превосходит по абсолютной величине  $K/\varepsilon$  ( $K = \text{const} > 0$ ). Для  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  существуют открытые подобласти  $G_1(\varepsilon) \subset G_0$ , содержащие  $x_0, y_0, t_0$ ; расстояния от точек  $G_1$  до границы  $G_0$  ограничены снизу положительной константой.

При условиях 1) — 5) в  $G$  существует непрерывно дифференцируемое решение уравнения  $\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial y} Y_0 = S, u_1(x, y, t)|_{x, y, t \in M} = 0, u_1$  легко строится из характеристик (3) и считается поэтому известным.

6) Пусть в  $G$   $u_1$  ограничено и имеет ограниченные непрерывные производные по  $x, y, t$ .

7)  $\frac{\partial X_1}{\partial x} u_1$  имеет среднее значение.

8) Для  $\partial u_1 / \partial x, \partial u_1 / \partial y$  существуют средние значения.

9)  $X_2 \equiv X'_\varepsilon|_{\varepsilon=0}$  тоже имеют средние значения.

10) Существует среднее значение  $H(x)$  матрицы  $D^{-1}, 0 < c_1 \leq |\text{Det } H| \leq c_2 < \infty$ .

11) Существует среднее значение  $R(x)$  функции  $D^{-1} \left( Y_1 + \frac{\partial Y_0}{\partial x} u_1 \right) (Y_1 \equiv Y'_\varepsilon|_{\varepsilon=0})$ .

12) Существует среднее значение выражения  $\frac{\partial X_1}{\partial y} D \int_{t_0}^t \left[ D^{-1} \left( Y_1 + \frac{\partial Y_0}{\partial x} u_1 - B_1 \right) \right] \Big|_{y=\varphi(x, y_0, t_0, t)} dt$ , где  $B_1(x) \equiv H^{-1}R$  ( $B_1$  входит в систему (4)).

Из условий 1) — 12) вытекает, что в  $G$  определено непрерывно дифференцируемое решение уравнения  $\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial y} Y_0 - \frac{\partial Y_0}{\partial y} v_1 = Y_1 + \frac{\partial Y_0}{\partial x} u_1 - B_1, v_1|_{x, y, t \in M} = 0$ , причем  $\frac{\partial X_1}{\partial y} v_1$  имеет среднее значение, — это легко проверяется, так как  $v_1$  можно построить из характеристик, как и  $u_1$ . Из сказанного следует, что функция  $P \equiv \frac{\partial X_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial X_1}{\partial y} v_1 - \frac{\partial u_1}{\partial x} \bar{X}_1 - \frac{\partial u_1}{\partial y} B_1 + X_2$  имеет среднее значение  $\equiv A_2(x)$  ( $A_2$  входит в систему (4)).

Пусть:

13) Функция  $P - A_2$  равномерно ограничена.

14) Выражения

$$\frac{\partial}{\partial y_0} \left( \int_{t_0}^{t_0+T} (P - A_2) dt \right), \quad \frac{\partial}{\partial t_0} \left( \int_{t_0}^{t_0+T} (P - A_2) dt \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y_0} \left( \int_{t_0}^{t_0+T} D^{-1} \left( Y_1 + \frac{\partial Y_0}{\partial x} u_1 - B_1 \right) dt \right), \quad \frac{\partial}{\partial t_0} \left( \int_{t_0}^{t_0+T} D^{-1} \left( Y_1 + \frac{\partial Y_0}{\partial x} u_1 - B_1 \right) dt \right)$$

(интегралы берутся вдоль (3)) равномерно ограничены при  $0 \leq T < \infty$ .

15) Система (4) обладает «устойчивостью»: для всякого  $K > 0$  существуют такие  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$ ,  $\bar{\varepsilon} > 0$  ( $\bar{\varepsilon} \leq \varepsilon_0$ ), что если на некотором интервале  $[t_0, \bar{t}(\varepsilon)] \subseteq [t_0, K/\varepsilon]$  при  $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$  решения (4) и уравнения  $\dot{z} = Y_0(x, z, t) + \varepsilon B_1(x) + \varepsilon \varphi(t, \varepsilon)$  существуют при начальных значениях  $x_0, y_0, t_0$  и  $z_0, t_0$  ( $|z_0 - y_0| \leq c_1$ ,  $\bar{x}, \bar{y}$  — решение (4) с начальной точкой  $x_0, y_0, t_0$ ), а  $\varphi(t, \varepsilon)$  — произвольная непрерывная функция такая, что  $\sup_{t_0 \leq t \leq \bar{t}} |\varphi(t, \varepsilon)| \leq c_1$ , то при  $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ ,  $t \in [t_0, \bar{t}]$

$$|\bar{y} - z| \leq c_2 (\varepsilon \sup_{t_0 \leq t \leq \bar{t}} |\varphi(t, \varepsilon)| \cdot |t - t_0| + |y_0 - z_0|).$$

Определим интервал  $[t_0, t_1(\varepsilon)]$ :  $t_1 > t_0$ ,  $t_1 - t_0 \leq K/\varepsilon$ , при  $t \in [t_0, t_1]$  решение (4) с начальной точкой  $x_0, y_0, t_0$  не выходит из  $G_1(\varepsilon)$ .

Теорема 1. При условиях 1) — 15) для произвольных  $K > 0$ ,  $\delta > 0$  существует такое  $\varepsilon_1 > 0$  ( $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ ), что при  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$ ,  $t \in [t_0, t_1(\varepsilon)]$

$$1) |y - \bar{y}| \leq \delta; \quad 2) |x - \bar{x} - \varepsilon u_1(\bar{x}, \bar{y}, t)| \leq \varepsilon \delta,$$

где  $x, y$  — решения (1) с начальной точкой  $x_0, y_0, t_0$ .

Из условий 1) — 15) вытекает, что в  $G$  существует непрерывно дифференцируемое решение уравнения  $\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial y} Y_0 = P - A_2$ ,  $u_2(x, y, t)|_{x, y, t \in M} = 0$ , которое легко строится из характеристик, как и  $u_1$ .

Пусть выполняются дополнительные условия:

16) В  $G$   $v_1, u_2$  ограничены и имеют непрерывные ограниченные производные по  $x, y, t$ .

17) Выражения

$$\int_{t_0}^{t_0+T} S dt, \quad \int_{t_0}^{t_0+T} (P - A_2) dt, \quad \int_{t_0}^{t_0+T} D^{-1} \left( Y_1 + \frac{\partial Y_0}{\partial x} u_1 - B_1 \right) dt$$

(интегралы берутся вдоль (3)) равномерно ограничены при  $0 \leq T < \infty$ .

При выполнении условий 16), 17) имеют место улучшенные оценки:

Теорема 2. При условиях 1) — 17) для произвольного  $K > 0$  существуют такие  $C > 0$ ,  $\varepsilon_1 > 0$  ( $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ ), что при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ ,  $t \in [t_0, t_1(\varepsilon)]$

$$1) |y - \bar{y}| \leq C\varepsilon; \quad 2) |x - \bar{x} - \varepsilon u_1(\bar{x}, \bar{y}, t)| \leq C\varepsilon^2.$$

Замечание 1. Ограничение 3) можно ослабить, допустив, как это сделано в (3), многократное пересечение (3) с  $M$ . Тогда теоремы 1 и 2 сохраняются при некотором изменении формулировок и условий.

Замечание 2. Можно отказаться от условия 15). Тогда рассматривая решения (1) и (4) на интервале  $[t_0, t_2(\varepsilon)] \subseteq [t_0, K/\varepsilon]$  таким, что при  $t \in [t_0, t_2]$  решения (1), (4) лежат в  $G_1(\varepsilon)$ , можно утверждать, что неравенства 2) теорем 1 и 2 (при некотором изменении условий) сохраняются, но при этом функция  $\bar{y}$ , входящая в формулировки теорем, уже не является решением (4), а определяется так:  $\bar{y}|_{t=t_0} = y_0$ ,  $|\bar{y} - Y_0(\bar{x}, \bar{y}, t) - \varepsilon B_1(\bar{x})| \leq \varepsilon \omega$ , где  $\omega = \alpha(\varepsilon)$  для теоремы 1 и  $O(\varepsilon)$  для теоремы 2, а  $\bar{x}$  — решение (4).

Асимптотический метод, связанный со схемой усреднения, отличной от (3) и имеющей иную область применения, предложен в (4).

§ 3. Системы в стандартной форме. В <sup>(1)</sup> изучены системы в стандартной форме  $\dot{x} = \varepsilon X(x, t)$ , являющиеся частным случаем (1). Из результатов <sup>(3)</sup> вытекают уравнения приближений, выведенные в <sup>(1)</sup>; из (4), в частности, вытекают уравнения второго приближения  $\dot{\bar{x}} = \varepsilon X_0(\bar{x}) + \varepsilon^2 M_t \left\{ \left( \tilde{X} \frac{\partial}{\partial x} \right) X(\bar{x}, t) \right\}$ , где  $\partial \tilde{X} / \partial t = X(\bar{x}, t) - X_0(\bar{x})$ ,  $X_0 = M_t X$ ,  $M_t$  — оператор усреднения по явно входящему  $t$ .

§ 4. Системы с быстро вращающейся фазой. В <sup>(2)</sup> изучены системы с быстро вращающейся фазой, являющиеся частным случаем (1), которые можно записать в виде  $\dot{x} = \varepsilon A(x, \psi, \varepsilon)$ ,  $\dot{\psi} = \omega(x) + \varepsilon B(x, \psi, \varepsilon)$ , где  $A, B$  периодичны по  $\psi$ . Из результатов <sup>(3)</sup> вытекают уравнения приближений, выведенные в <sup>(2)</sup>; из (4), в частности, следуют уравнения второго приближения для  $x, \psi$ .

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

Поступило  
16 XI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> Н. Н. Боголюбов, О некоторых статистических методах в математической физике, 1945. <sup>2</sup> Н. Н. Боголюбов, Д. Н. Зубарев, Укр. матем. журн., 7, № 7 (1955). <sup>3</sup> В. М. Волосов, ДАН, 137, № 1 (1961). <sup>4</sup> А. М. Молчанов, ДАН, 136, № 5 (1961).

Е. Г. ГЛАДЫШЕВ

# О ПЕРИОДИЧЕСКИ КОРРЕЛИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 22 X 1960)

1. Определение. Случайная последовательность  $x_n$ ,  $n = 0, \pm 1, \dots$ , называется периодически коррелированной, если  $M|x_n|^2 < \infty$  при всех  $n$  и существует целое число  $T$  такое, что при любых  $n$  и  $\tau$

$$Mx_n = Mx_{n+T}, \quad Mx_{n+\tau} \bar{x}_n = Mx_{n+T+\tau} \bar{x}_{n+T}. \quad (1)$$

Число  $T$  в этом случае называется периодом последовательности  $x_n$ .

В рассматриваемых ниже задачах можно без ограничения общности всюду считать, что  $Mx_n = 0$ . В таком случае основной характеристикой последовательности  $x_n$  будет ее корреляционная функция

$$B(n, \tau) = Mx_{n+\tau} \bar{x}_n, \quad (2)$$

являющаяся периодической по  $n$  с периодом  $T$  и поэтому допускающая представление

$$B(n, \tau) = \sum_{k=0}^{T-1} B_k(\tau) \exp\left(\frac{2\pi i k n}{T}\right). \quad (3)$$

Для удобства доопределим функции  $B_k(\tau)$ ,  $k = 0, \dots, T-1$ , для всех целых  $k$  с помощью равенства  $B_k(\tau) = B_{k+T}(\tau)$ .

Теорема 1. Функция (3) будет корреляционной функцией некоторой периодически коррелированной случайной последовательности в том и только в том случае, если матрица

$$B(\tau) = \|B_{jk}(\tau)\|_{j, k=0, \dots, T-1}, \quad (4)$$

где

$$B_{jk}(\tau) = B_{k-j}(\tau) \exp(2\pi i j \tau / T), \quad (5)$$

будет корреляционной матрицей некоторой  $T$ -мерной стационарной случайной последовательности.

Доказательство. Нам надо показать, что выполнение при любых целых  $t_1, t_2, \dots, t_n$  и любых комплексных  $a_1, a_2, \dots, a_n$  неравенства

$$\sum_{p, q=1}^n B(t_q, t_p - t_q) a_p \bar{a}_q \geq 0, \quad (6)$$

где  $B(t, \tau)$  — функция (3), равносильно выполнению при любых  $k_1, \dots, k_n$ , принимающих целые значения в пределах от 0 до  $T-1$ , и таких же как раньше  $t_1, \dots, t_n$ ,  $a_1, \dots, a_n$  неравенства

$$\sum_{p, q=1}^n [B_{k_p k_q}(t_p - t_q) a_p \bar{a}_q] \geq 0, \quad (7)$$

де  $B_{jk}(\tau)$  — функции (5). Предположим сначала, что имеет место (6).  
 В таком случае, воспользовавшись тем, что, в силу (3),

$$B_l(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} B(n, \tau) \exp\left(-\frac{2\pi i n l}{T}\right), \quad (8)$$

мы будем иметь:

$$\begin{aligned} \sum_{p, q} B_{p k_p}(t_p - t_q) a_p \bar{a}_q &= \sum_{p, q} B_{k_q - k_p}(t_p - t_q) \exp\left(\frac{2\pi i k_p(t_p - t_q)}{T}\right) a_p \bar{a}_q = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{p, q} \exp\left(\frac{2\pi i k_p(t_p - t_q)}{T}\right) a_p \bar{a}_q \sum_{n=0}^{T-1} B(n, t_p - t_q) \exp\left(-\frac{2\pi i n(k_q - k_p)}{T}\right) = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=0}^{T-1} \left[ \sum_{p, q} B(m + t_q, t_p - t_q) a_p \exp\left(\frac{2\pi i k_p(m + t_p)}{T}\right) \times \right. \\ &\quad \left. \times a_q \exp\left(\frac{2\pi i k_q(m + t_q)}{T}\right) \right] \geq 0. \end{aligned}$$

Если же мы предположим, что выполняется (7), то, в силу (5) и (3),

$$\begin{aligned} \sum_{p, q} B(t_q, t_p - t_q) a_p \bar{a}_q &= \sum_{p, q} a_p \bar{a}_q \sum_{l=0}^{T-1} B_l(t_p - t_q) \exp\left(\frac{2\pi i l t_q}{T}\right) = \\ &= \sum_{p, q} a_p \bar{a}_q \sum_{k=0}^{T-1} B_{k-j}(t_p - t_q) \exp\left(\frac{2\pi i t_q(k-j)}{T}\right) = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{p, q} a_p \bar{a}_q \sum_{i, k} B_{k-j}(t_p - t_q) \exp\left(\frac{2\pi i j(t_p - t_q)}{T}\right) \exp\left(\frac{2\pi i(k t_q - j t_p)}{T}\right) = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{p, q} a_p \bar{a}_q \sum_{j, k} B_{jk}(t_p - t_q) \exp\left(\frac{2\pi i(k t_q - j t_p)}{T}\right) \geq 0, \end{aligned}$$

тем самым теорема 1 доказана.

2. Воспользовавшись теперь спектральным представлением корреляционной матрицы многомерной стационарной случайной последовательности, мы можем сформулировать теорему 1 также следующим образом:

Для того чтобы функция (3) была корреляционной функцией некоторой периодически коррелированной последовательности, необходимо и достаточно, чтобы функции  $B_k(\tau)$ ,  $k = 0, \dots, T-1$ , все были представимы в виде интегралов Фурье — Стильтьеса

$$B_k(\tau) = \int_0^{2\pi} e^{i\tau\lambda} dF_k(\lambda), \quad (9)$$

где  $F_k(\lambda)$ ,  $k = 0, \dots, T-1$ , — непрерывные слева комплексные функции ограниченной вариации такие, что при любых  $\lambda_1$  и  $\lambda_2 \geq \lambda_1$  приращение  $\mathcal{F}(\lambda_2) - \mathcal{F}(\lambda_1)$  матрицы

$$\mathcal{F}(\lambda) = \|F_{k-j}((\lambda - 2\pi j)/T)\|_{j, k=0, \dots, T-1} \quad (10)$$

(при  $k < 0$  и при  $\lambda < 0$  или  $\lambda > 2\pi$  функции  $F_k(\lambda)$  доопределяются при помощи равенств  $F_k(\lambda) = F_{k+T}(\lambda)$ ,  $F_k(\lambda + 2\pi) = F_k(\lambda) + F_k(2\pi)$ ,  $F_k(0) = 0$  при всех  $k$ ) было эрмитовой неотрицательно-определенной матрицей.

Отметим еще, что из формул (3) и (9) легко следует, что периодически коррелированная последовательность  $x_n$  обязательно будет гармонизуемой в смысле (1), т. е. будет допускать представление

$$x_n = \int_0^{2\pi} e^{in\lambda} z(d\lambda), \quad (11)$$

где  $z(\Lambda)$  — случайная функция множества с нулевым математическим ожиданием, удовлетворяющая условию

$$Mz(\Lambda) \overline{z(M)} = \sum_{k=-T+1}^{T-1} \int_{\Lambda \cap (M - \frac{2\pi k}{T})} dF_k(\lambda) \quad (12)$$

( $M - a$  есть множество точек  $\mu - a$ ,  $\mu \in M$ ).

Иначе это можно выразить так: спектр случайной последовательности  $x_n$  сосредоточен на  $2T-1$  отрезках прямых  $\lambda - \mu = 2\pi k/T$ ,  $k = -T+1, \dots, T-1$ , заключенных внутри квадрата  $0 \leq \lambda, \mu < 2\pi$ , и функции  $F_k(\lambda)$  задают спектральные интенсивности на этих  $2T-1$  прямых. Отсюда, разумеется, также вытекает сформулированное выше условие, касающееся матрицы  $\mathcal{F}(\lambda)$ .

Формулы (11) и (12) следуют также из возможности представления периодически коррелированной последовательности  $x_n$  в виде

$$x_n = \sum_{k=0}^{T-1} z_n^k \exp\left(\frac{2\pi i k n}{T}\right), \quad (13)$$

где  $z_n = (z_n^0, \dots, z_n^{T-1})$  —  $T$ -мерная стационарная (в широком смысле) последовательность, задаваемая формулой  $z_n^k = \frac{1}{T} \sum_{m=0}^{T-1} \frac{y_{n-m}^m}{T} \exp\left(-\frac{2\pi i m k}{T}\right)$ , а

$y_t = (y_t^0, \dots, y_t^{T-1})$  —  $T$ -мерный случайный процесс, полученный путем формальной замены в спектральном разложении  $T$ -мерной стационарной последовательности  $y_n = (x_{nT}, x_{nT+1}, \dots, x_{nT+T-1})$  дискретного параметра  $n$  непрерывным параметром  $t$ .

Замечание. Аналогично может быть разобран случай многомерных периодически коррелированных случайных последовательностей  $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^s)$ , для которых

$$Mx_{n+\tau}^l = Mx_{n+T}^l, \quad Mx_{n+\tau}^l \overline{x_n^m} = Mx_{n+T+\tau}^l \overline{x_{n+T}^m}. \quad (14)$$

Предполагая и здесь, что  $Mx_n^k \equiv 0$ , мы за основные статистические характеристики такой многомерной последовательности должны принять корреляционные функции

$$Mx_{n+\tau}^l \overline{x_n^m} = B^{lm}(n, \tau) = \sum_{k=0}^{T-1} B_k^{lm}(\tau) \exp\left(\frac{2\pi i k n}{T}\right). \quad (15)$$

При этом для того, чтобы функции (15) являлись корреляционными функциями некоторой многомерной  $T$ -периодической случайной последовательности, необходимо и достаточно, чтобы  $(sT \times sT)$ -матрица  $B(\tau) = \|B_{lm}(\tau)\|$ ,  $l, m=1, \dots, s$ ,  $B_{lm}(\tau) = \|B_{jk}^{lm}(\tau)\|$ ,  $j, k=0, \dots, T-1$ , где  $B_{jk}^{lm}(\tau) = B_{k-j}^{lm}(\tau) \exp\left(\frac{2\pi i j \tau}{T}\right)$ , была корреляционной матрицей некоторой  $sT$ -мерной стационарной случайной последовательности. Иначе это можно сформулировать так: функции  $B_k^{lm}(\tau)$  должны быть представимы в виде  $B_k^{lm}(\tau) = \int_0^{2\pi} e^{i\tau\lambda} dF_k^{lm}(\lambda)$ , где непрерывные слева комплексные функции ограниченной вариации  $F_k^{lm}(\lambda)$  обладают тем свойством, что  $(sT \times sT)$ -матрица  $\mathcal{F}(\lambda) = \|F_{lm}(\lambda)\|$ ,  $l, m=1, \dots, s$ ,  $F_{lm}(\lambda) = \|F_{k-j}^{lm}(\frac{\lambda - 2\pi j}{T})\|$ ,  $j, k=0, \dots, T-1$  является матрицей с эрмитовскими неотрицательно-определенными приращениями.

Дальнейшие результаты настоящей статьи также могут быть без труда перенесены на случай многомерных периодически коррелированных последовательностей, однако для простоты записи мы будем далее рассматривать лишь одномерный случай.

3. Легко понять, что случайная последовательность  $x_n, n = 0, \pm 1, \dots$ , будет периодически коррелированной с периодом  $T$  тогда и только тогда, когда  $T$ -мерная случайная последовательность  $y_n = (y_n^0, \dots, y_n^{T-1})$ , где  $y_n^k = x_{nT+k}, -\infty < n < \infty, k = 0, \dots, T-1$ , будет стационарной в широком смысле, т. е.

$$M y_{n+\tau}^j \overline{y_n^k} = \int_0^{2\pi} e^{i\tau\lambda} dF_{jk}(\lambda), \quad j, k = 0, \dots, T-1. \quad (16)$$

Обозначим через  $H_x, H_x(n)$  и  $\hat{H}_x(n)$  линейные замыкания (в среднем квадратичном), соответственно, случайных величин  $\{x_\tau, -\infty < \tau < \infty\}$ ,  $\{x_\tau, \tau \leq n\}$  и  $\{x_\tau, \tau \neq n\}$ . Следуя <sup>(2)</sup>, назовем случайную последовательность  $x_n$  регулярной, если  $\bigcap_n H_x(n) = 0$ , и сингулярной, если  $\bigcap_n H_x(n) = H_x$ . Регулярную последовательность  $x_n$ , для которой при всех  $n$   $x_n \notin H_n(n-1)$ , назовем вполне регулярной. Будем говорить, что последовательность  $x_n$  минимальна, если  $\min_{h \in \hat{H}_x(n)} M |x_n - h|^2 = \sigma_n^2 > 0$  при всех  $n$ . В таком случае условие полной регулярности последовательности  $x_n$ , очевидно, совпадает с условием регулярности наивысшего ранга (в смысле работы <sup>(3)</sup>) многомерной стационарной последовательности  $y_n$ , а условие минимальности последовательности  $x_n$  совпадает с условием минимальности наивысшего ранга (в смысле <sup>(4, 5)</sup>) последовательности  $y_n$ .

Теорема 2. Матрица  $\|dF_{jk}(\lambda)/d\lambda\|_{j,k=0,\dots,T-1}$  определяется равенством

$$\left\| \frac{dF_{jk}(\lambda)}{d\lambda} \right\|_{j,k=0,\dots,T-1} = T U^{-1}(\lambda) \frac{d\mathcal{F}(\lambda)}{d\lambda} U(\lambda) \text{ при почти всех } \lambda, \quad (17)$$

где  $d\mathcal{F}(\lambda)/d\lambda$  — матрица из производных всех матричных элементов матрицы  $\mathcal{F}(\lambda)$ , а  $U(\lambda) = \|U_{jk}(\lambda)\|_{j,k=0,\dots,T-1}$  — зависящая от  $\lambda$  унитарная матрица с элементами  $U_{jk}(\lambda) = T^{-1/2} \exp\left(\frac{2\pi i j k - i k \lambda}{T}\right)$ .

Из теоремы 2, в силу результатов работ <sup>(3-5)</sup>, вытекают следующие предложения:

Теорема 3. Периодически коррелированная случайная последовательность  $x_n$  вполне регулярна в том и только в том случае, если: 1) все  $F_t(\lambda)$  абсолютно непрерывны; 2)  $\det d\mathcal{F}(\lambda)/d\lambda > 0$  почти всюду;

$$3) \int_0^{2\pi} \ln \det \frac{d\mathcal{F}(\lambda)}{d\lambda} d\lambda > -\infty.$$

Теорема 4. Периодически коррелированная случайная последовательность  $x_n$  минимальна тогда и только тогда, когда: 1)  $\det d\mathcal{F}(\lambda)/d\lambda > 0$  почти всюду; 2)  $\int_0^{2\pi} \text{Sp}(d\mathcal{F}(\lambda)/d\lambda)^{-1} d\lambda < \infty$ .

В заключение автор выражает благодарность А. М. Яглому, ценные советы которого способствовали улучшению настоящей заметки.

Институт физики атмосферы  
Академии наук СССР

Поступило  
10 X 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1) <sup>1</sup> A. Blanc-Lapierre, R. Fortet, Théorie des fonctions aléatoires, Paris, 1953. <sup>2</sup> А. Н. Колмогоров, Бюлл. МГУ, 2, № 6 (1941). <sup>3</sup> В. Н. Засухин, ДАН, 33, 435 (1941). <sup>4</sup> Ю. А. Розанов, ДАН, 116, № 6, 22 (1957). <sup>5</sup> P. Magani, C. R., 246, № 15, 2215 (1958).

А. А. ГОЛЬДБЕРГ

# О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С РАЗДЕЛЕННЫМИ НУЛЯМИ И ПОЛЮСАМИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 14 XI 1960)

Пусть  $f(z)$  — мероморфная в  $|z| < R \leq \infty$  функция. Мы будем употреблять стандартные в неванлинновской теории обозначения <sup>(1)</sup>. Обозначим  $N(r) = \bar{N}(r, \infty) + N(r, 0)$ ,  $m(r) = \bar{m}(r, \infty) + m(r, 0)$ . Все встречающиеся ниже пределы берутся при  $r \rightarrow R$ . Во многих исследованиях (см., например, <sup>(2)</sup>) для характеристики распределения нулей и полюсов вводится величина  $k(f) = \limsup N(r)/T(r)$ ,  $0 \leq k(f) \leq 2$ . Неравенство  $k(f) < 2$  указывает на «недостаточное» по сравнению с «нормальным» количество нулей и полюсов функций  $f(z)$ . Нам будет удобно ввести величину  $d(f) = 2 - k(f) = \liminf m(r)/T(r)$ , которую естественно назвать недостатком нулей и полюсов функции  $f(z)$ . Очевидно,  $0 \leq d(f) \leq 2$  и  $d(f) \geq \delta(0) + \delta(\infty)$ . В настоящей заметке мы покажем, что определенные ограничения, наложенные только на аргументы нулей и полюсов  $f(z)$ , влекут за собой  $d(f) > 0$ . Кроме того, будет обсужден вопрос о том, когда при этих же ограничениях  $\delta(0) + \delta(\infty) > 0$ .

Пусть  $p$  — натуральное число,  $\pi/(2p) > \eta \geq 0$ ,  $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ . Обозначим  $D_1^p(\eta, \varphi_0)$  и  $D_2^p(\eta, \varphi_0)$  следующие множества:

$$D_1^p(\eta, \varphi_0) = \bigcup_{j=0}^{p-1} \left\{ \left| \arg z - \varphi_0 - \pi \frac{2j}{p} \right| \leq \eta \right\}, \quad (1)$$

$$D_2^p(\eta, \varphi_0) = \bigcup_{j=0}^{p-1} \left\{ \left| \arg z - \varphi_0 - \pi \frac{2j+1}{p} \right| \leq \eta \right\}.$$

Обозначим  $a_k = |a_k| e^{i\alpha_k}$  — нули  $f(z)$ ;  $b_n = |b_n| e^{i\beta_n}$  — полюсы  $f(z)$ ;  $\{c_v\}$  — последовательность, составленная из нулей и полюсов с учетом их кратности.

Определение (ср. <sup>(3)</sup>). Если существуют такие  $\varphi_0$  и  $\eta$ , что

$$\sum_{a_k \in D_1^p(\eta, \varphi_0)} |a_k|^{-p} < \infty, \quad \sum_{b_n \in D_2^p(\eta, \varphi_0)} |b_n|^{-p} < \infty, \quad (2)$$

то будем говорить, что у  $f(z)$  нули и полюсы  $(p, \eta)$ -разделены.

Очевидно, нули и полюсы  $f(z)$  будут  $(p, \eta)$ -разделенными, в частности, тогда, когда все  $a_k \in D_1^p(\eta, \varphi_0)$  и все  $b_n \in D_2^p(\eta, \varphi_0)$ . В случае  $R < \infty$  условие (2) означает, что за пределами соответствующих множеств  $D_1^p(\eta, \varphi_0)$  и  $D_2^p(\eta, \varphi_0)$  лежит конечное число нулей и полюсов.

Теорема 1. Пусть у функции  $f(z)$  нули и полюсы  $(p, \eta)$ -разделены. Если а)  $R = \infty$  и  $0 < \limsup T(r, f)/r^p < \infty$ , то  $\delta(0) = \delta(\infty) = 1$ ,  $d(f) = 2$ . Если б)  $R = \infty$  и  $\limsup T(r, f)/r^p = \infty$  или в)  $R < \infty$  и  $\lim T(r, f) = \infty$ , то

$$d(f) \geq \frac{2 \cos p\eta}{1 + \cos p\eta} > 0. \quad (3)$$

Доказательство. Если выполняется а), то для функции  $f(z)$  с  $(p, \eta)$ -разделенными нулями и полюсами справедливо представление  $f(z) = f_1(z) \exp P(z)$ , где  $f_1(z)$  — мероморфная функция рода не выше  $p-1$  и  $P(z)$  — многочлен степени  $p^{(3)*}$ , следовательно,  $\delta(0, f) = \delta(\infty, f) = 1$  и  $d(f) = 2$ . При  $R = \infty$  из  $\limsup_{r \rightarrow \infty} T(r, f)/r^p = \infty$  следует, что  $\lim_{r \rightarrow \infty} T(r, f)/r^p = \infty$  <sup>(3)</sup>, поэтому  $O(r^p) = o(T(r, f))$ . Очевидно, последнее справедливо и при  $R < \infty$ , так как в этом случае  $O(r^p) = O(1)$ . Не уменьшая общности, можно считать  $\varphi_0 = 0$ . Применим к кругу  $|z| \leq r < R$  ( $|c_v| \neq r$ ,  $v = 1, 2, \dots$ ) формулу Шварца — Иенсена <sup>(1)</sup>, стр. 165):

$$\begin{aligned} \ln f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| \frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z} d\theta + \\ &+ \sum_{|b_n| < r} \ln \frac{r^2 - \bar{b}_n z}{r(z - b_n)} - \sum_{|a_k| < r} \ln \frac{r^2 - \bar{a}_k z}{r(z - a_k)} + iC, \quad \operatorname{Im} C = 0. \end{aligned}$$

Продифференцировав  $p$  раз по  $z$ , положим  $z = 0$  и умножим обе стороны полученного равенства на  $r^p/(2p!)$ . Тогда придем к равенству

$$\begin{aligned} \frac{1}{2p!} r^p (\ln f(z))^{(p)} \Big|_{z=0} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ip\theta} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta - \\ &- \frac{1}{2p} \sum_{|a_k| < r} \frac{r^{2p} - |a_k|^{2p}}{a_k^p r^p} + \frac{1}{2p} \sum_{|b_n| < r} \frac{r^{2p} - |b_n|^{2p}}{b_n^p r^p}. \end{aligned}$$

Отделяя действительную часть, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| \cos p\theta d\theta &= \frac{1}{p} \sum_{|a_k| < r} \operatorname{sh} \left( p \ln \frac{r}{|a_k|} \right) \cos p\alpha_k - \\ &- \frac{1}{p} \sum_{|b_n| < r} \operatorname{sh} \left( p \ln \frac{r}{|b_n|} \right) \cos p\beta_n + O(r^p). \end{aligned}$$

Учитывая (2), неравенство  $0 < \operatorname{sh}(p \ln(r/|c_v|)) \leq 2^{-1}(r/|c_v|)^p$ ,  $|c_v| < r$ , и то обстоятельство, что для  $a_k \in D_1^p(\eta, 0)$   $\cos p\alpha_k \geq \cos p\eta > 0$  и для  $b_n \in D_2^p(\eta, 0)$   $-\cos p\beta_n \geq \cos p\eta > 0$ , получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| \cos p\theta d\theta \geq \frac{\cos p\eta}{p} \sum_{|c_v| < r} \operatorname{sh} \left( p \ln \frac{r}{|c_v|} \right) + O(r^p). \quad (4)$$

Левая часть (4), очевидно, не превышает  $m(r)$ ,  $\operatorname{sh}(p \ln(r/|c_v|)) > p \ln(r/|c_v|)$  и  $O(r^p) = o(T(r))$ . Поэтому  $m(r) \geq N(r) \cos p\eta + o(T(r))$ . Отсюда, учитывая  $m(r) + N(r) = 2T(r) + O(1)$ , легко получаем (3).

В дальнейшем ограничимся случаем  $R = \infty$ , не оговаривая этого особо. Покажем, что если в (1) положить  $\eta = \pi/(2p)$  и  $\leq \eta$  заменить на  $< \eta$ , то при выполнении (2) может быть  $d(f) = 0$ . Действительно, для  $f(z) = B(z^p)$ , где

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - z/a_k}{1 - z/\bar{a}_k}, \quad a_k = |a_k| e^{i\alpha_k} \rightarrow \infty, \quad 0 < \alpha_k < \pi, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_k}{|a_k|} < \infty,$$

$m(r) = o(r^p)$  вне некоторого множества конечной логарифмической меры, как это следует из одного результата Хеймана <sup>(4)\*\*</sup>;

\* Пользуемся случаем внести исправление в <sup>(3)</sup>. В формулировках теоремы и следствия 3 нужно утверждать только существование предела  $\lim_{r \rightarrow \infty} T(r)/r^\lambda$ , а не его положительность.

\*\* Если предположить  $\sum |a_k|^{-1} \sin \alpha_k \cdot \ln(2/\sin \alpha_k) < \infty$ , то  $m(r) = o(r^p)$  без исключительного множества <sup>(5)</sup>.

в то же время за счет выбора  $|a_k|$  можно добиться, чтобы характеристика  $T(r)$  удовлетворяла условиям а) или б). Отметим также, что с помощью  $B(z)$ , используя теоремы 2.7 и 2.1 из (6), можно построить примеры мероморфных функций с  $(p, 0)$ -разделенными нулями и полюсами, у которых  $T(r)/r^p \rightarrow 0$  и  $d(f) = 0$ .

Можно показать, что при  $0 < \eta < \pi/(2p)$  и выполнении условий теоремы 1б) может быть  $\delta(0) = \delta(\infty) = 0$ . Это сразу вытекает из следующего утверждения. Пусть  $p$  — нецелое число,  $1/2 < p < \infty$ ;  $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные действительные числа. Существует мероморфная в  $z \neq \infty$  функция  $f(z)$  порядка  $p$ , все нули которой лежат на лучах  $\arg z = \alpha$  и  $\arg z = \alpha + \pi/p = \alpha_1$  и все полюсы на лучах  $\arg z = \beta$  и  $\arg z = \beta + \pi/p = \beta_1$ , для которой  $\delta(0) = \delta(\infty) = 0$ . Построим эту функцию. Пусть  $\{p_j\}$  — монотонно возрастающая последовательность положительных чисел такая, что  $p_{j+1}/p_j \rightarrow \infty$  при  $j \rightarrow \infty$ . Пусть  $g_1(z)(g_2(z))$  — каноническое произведение рода  $[p]$  с нулями во всех точках вида  $n^{1/p}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , попадающих в  $[p_{2j-1}, p_{2j}]$  (попадающих в  $[p_{2j}, p_{2j+1})$ ),  $j = 1, 2, \dots$ . Обозначим  $g(z) = g_1(z)g_2(z)$ . Искомой функцией является  $f(z) = g_1(ze^{-i\alpha})g_1(ze^{-i\alpha_1})\{g_2(ze^{-i\beta})g_2(ze^{-i\beta_1})\}^{-1}$ . Чтобы показать, что  $\delta(0, f) = 0$ , представим  $f(z) = g(ze^{-i\alpha})g(ze^{-i\alpha_1})\{g_2(ze^{-i\alpha})g_2(ze^{-i\alpha_1}) \times g_2(ze^{-i\beta})g_2(ze^{-i\beta_1})\}^{-1}$ . Учитывая известное (7) асимптотическое представление для  $g(z)$ , получим, что вне кружков с центрами в нулях  $G(z) = g(ze^{-i\alpha})g(ze^{-i\alpha_1})$  с нулевой линейной плотностью справедливо  $\ln |G(re^{i\varphi})| \sim \frac{\pi}{2} \sin p(\varphi - \alpha) \cdot r^p$  [при  $\varphi \in (\alpha, \alpha_1)$  и  $\ln |G(re^{i\varphi})| = o(r^p)$  при  $\varphi \in [\alpha_1, \alpha + 2\pi]$ ]. С другой стороны, можно показать, что для  $r_j \in (p_{2j-1}, p_{2j})$  таких, что  $r_j/p_{2j-1} \rightarrow \infty$  и  $p_{2j}/r_j \rightarrow \infty$  при  $j \rightarrow \infty$ ,  $\ln |g_2(r_j e^{i\varphi})| = o(r_j^p)$ . Отсюда следует, что  $m(r_j, 0, f(z)) = o(r_j^p)$  и, в силу  $T(r, f) > Cr^p$ ,  $\delta(0, f) = 0$ . Аналогично доказываем, что  $\delta(\infty, f) = 0$ .

При  $\eta = 0$  мы не в состоянии построить аналогичный пример, более того, представляется вероятным, что справедлива следующая гипотеза. Пусть для функции  $f(z)$  конечного порядка выполнены условия теоремы 1б) и  $\eta = 0$ . Тогда  $\delta(0, f) > 0$  и  $\delta(\infty, f) > 0$ . Мы в состоянии доказать эту гипотезу только при некоторых дополнительных предположениях.

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия теоремы 1б) и существуют такие постоянные  $\lambda > 1$  и  $1 > \mu > 0$ , что для всех  $r > r_0$  выполняется  $N(r)/N(\lambda r) \geq \mu$ . Тогда

$$d(f) \geq \frac{2\{1 + \kappa(\lambda)\mu\} \cos p\eta}{1 + \{1 + \kappa(\lambda)\mu\} \cos p\eta}, \quad \kappa(\lambda) = \frac{\text{sh}(p \ln \lambda)}{p \ln \lambda} - 1 > 0. \quad (5)$$

Чтобы показать это, заметим, что  $\text{sh } x/x$  является монотонно растущей функцией от  $x \in [0, \infty)$ . Это позволяет точнее оценить правую часть в (4). Действительно,

$$\begin{aligned} p^{-1} \sum_{|c_v| < r} \text{sh}(p \ln(r/|c_v|)) &= p^{-1} \sum_{|c_v| < r/\lambda} + p^{-1} \sum_{r/\lambda \leq |c_v| < r} 1 \geq \\ &\geq \frac{\text{sh}(p \ln \lambda)}{p \ln \lambda} \sum_{|c_v| < r/\lambda} \ln \frac{r}{|c_v|} + \sum_{r/\lambda \leq |c_v| < r} \ln \frac{r}{|c_v|} = \\ &= \kappa(\lambda) N(r/\lambda) + N(r) \geq \{\kappa(\lambda)\mu + 1\} N(r), \quad r > \lambda r_0. \end{aligned}$$

Далее рассуждения проводятся как при доказательстве теоремы 1.

**Следствие 1.** Если в условиях теоремы 2  $\eta = 0$ , то  $\delta(0, f) > 0$  и  $\delta(\infty, f) > 0$ .

Действительно, в этом случае из (5) следует

$$d(f) \geq (2 + 2\kappa(\lambda)\mu)/(2 + \kappa(\lambda)\mu) = \psi(\lambda, \mu) > 1,$$

и, следовательно,

$$\delta(0, f) \geq \psi(\lambda, \mu) - 1 > 0, \quad \delta(\infty, f) \geq \psi(\lambda, \mu) - 1 > 0.$$

Следствие 2. Пусть для функции  $f(z)$  конечного порядка  $\rho$  выполняются условия теоремы 1b) и  $\eta = 0$ . Тогда для всех  $r \in [1, \infty)$ , за исключением возможно множества с верхней логарифмической плотностью  $\leq 2\rho \ln \lambda / \ln \mu^{-1}$ ,  $\lambda > 1$ ,  $1 > \mu > 0$ , выполняется

$$m(r, 0) \geq (\psi(\lambda, \mu) - 1)T(r) + o(T(r)),$$

$$m(r, \infty) \geq (\psi(\lambda, \mu) - 1)T(r) + o(T(r)).$$

Для доказательства достаточно показать, что верхняя логарифмическая плотность множества  $\mathcal{E}$  (т. е.  $\limsup \{ \log \log N(r) / \log \log N(\lambda r) \}$  тех  $r$ , где  $N(r)/N(\lambda r) < \mu$ , не превышает  $2\rho \ln \lambda / \ln \mu^{-1}$ , а далее провести рассуждения как при доказательстве теоремы 2. Разумеется, следствие 2 может представлять интерес только при таком выборе  $\lambda > 1$  и  $1 > \mu > 0$ , что  $2\rho \ln \lambda / \ln \mu^{-1} < 1$ .

Приведем еще одну теорему, связанную с темой статьи.

Теорема 2. Пусть у целой функции  $f(z)$  рода  $\infty > \rho \geq 1$  все нули лежат внутри некоторого угла с вершиной в  $z = 0$  и раствором при нечетном  $\rho$  строго меньшим  $\pi/(p+1)$  и при четном  $\rho$  строго меньшим  $[1 - (2\rho)^{-1}] \pi/(p+1)$ . Тогда  $\delta(0, f) > 0$ .

Для случая, когда все нули  $f(z)$  лежат на одном луче, выходящем из  $z = 0$ , это утверждение было доказано Эдреем и Фуксом<sup>(2)</sup>. Доказательство теоремы 3 получается с помощью некоторой модификации метода этих авторов.

Ужгородский государственный  
университет

Поступило  
14 XI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Р. Неванlinna, Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941.  
<sup>2</sup> A. Edrei, W. H. J. Fuchs, Trans. Am. Math. Soc., 93, 292 (1959). <sup>3</sup> А. А. Гольдберг, Изв. Высш. учебн. завед., матем., № 4, 67 (1960). <sup>4</sup> W. K. Nothman, J. math. physics et appl., 35, 115 (1956). <sup>5</sup> А. А. Гольдберг, Укр. матем. журн., 11, 210 (1959). <sup>6</sup> А. А. Гольдберг, И. В. Островский, Уч. зап. Харьковск. гос. ун-ва, 5, в. 1, 1 (1961). <sup>7</sup> Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М., 1956.

И. Ц. ГОХБЕРГ и М. Г. КРЕЙН

# К ТЕОРИИ ТРЕУГОЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 23 XI 1960)

1. В дальнейшем  $\mathfrak{H}$  обозначает сепарабельное гильбертово пространство;  $\mathfrak{K}$  — нормированное кольцо всех линейных ограниченных операторов, действующих в  $\mathfrak{H}$ ;  $\mathfrak{E}_\infty$  — банахово пространство всех вполне непрерывных операторов с обычной нормой  $|A|_\infty = \sup_{f \in \mathfrak{H}} (|Af|/|f|)$  ( $A \in \mathfrak{E}_\infty$ ).

Пусть  $A \in \mathfrak{E}_\infty$ ; через  $s_n(A)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) будем обозначать занумерованные в порядке убывания с учетом их кратностей собственные числа неотрицательного оператора  $(A^*A)^{1/2}$ .

Как известно <sup>(1)</sup>, совокупность  $\mathfrak{E}_p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) всех операторов  $A \in \mathfrak{E}_\infty$ , для которых  $\sum_n s_n^p(A) < \infty$ , образует банахово пространство с нормой  $|A|_p = \left( \sum_n s_n^p(A) \right)^{1/p}$ .

Пусть  $\Pi = \{\pi_n\}_1^\infty$  — произвольная невозрастающая последовательность положительных чисел такая, что  $\lim \pi_n = 0$  и  $\sum \pi_n = \infty$ . Тогда совокупности  $\mathfrak{E}_\Pi$  и  $\mathfrak{E}_\pi$  всех операторов  $A \in \mathfrak{E}_\infty$ , для которых соответственно  $|A|_\Pi = \sup_n \left( \sum_1^n s_k(A) \sum_1^n \pi_k \right) < \infty$ ,  $|A|_\pi = \sum \pi_n s_n(A) < \infty$ , образуют банаховы пространства с нормами  $|A|_\Pi$  и  $|A|_\pi$ .

Обозначим через  $\mathfrak{E}_\Pi^{(0)}$  замыкание в  $\mathfrak{E}_\Pi$  линейала  $\mathfrak{K}$  всех конечномерных операторов. Оказывается, всегда  $\mathfrak{E}_\Pi^{(0)} \neq \mathfrak{E}_\Pi$ .

Все введенные пространства  $\mathfrak{E}$  вполне непрерывных операторов являются двусторонними самосопряженными идеалами в  $\mathfrak{K}$ .

Важным случаем пространства  $\mathfrak{E}_\pi$  является пространство  $\mathfrak{E}_\omega$ , где  $\omega = \{(2n-1)^{-1}\}_1^\infty$ . Это пространство было введено в рассмотрение В. И. Мацаевым, который выяснил его существенную роль в различных вопросах. Введение этого пространства послужило толчком к рассмотрению общих пространств  $\mathfrak{E}_\Pi$ ,  $\mathfrak{E}_\Pi^{(0)}$  и  $\mathfrak{E}_\pi$  и установлению связи между ними.

**Теорема 1.** *Общий вид линейного непрерывного функционала  $F(X)$  в  $\mathfrak{E}$ , где  $\mathfrak{E}$  — одно из пространств  $\mathfrak{E}_1$ ,  $\mathfrak{E}_p$  ( $1 < p \leq \infty$ ),  $\mathfrak{E}_\Pi^{(0)}$ ,  $\mathfrak{E}_\pi$ , дается формулой  $F(X) = \text{Sp}(A^*X)$ , где  $A$  — произвольный оператор из пространства  $\mathfrak{E}^*$ , совпадающего соответственно с  $\mathfrak{K}$ ,  $\mathfrak{E}_q$  ( $q^{-1} + p^{-1} = 1$ ),  $\mathfrak{E}_\pi$ ,  $\mathfrak{E}_\Pi$ , причем*

$$|F| = \sup_{X \in \mathfrak{E}} (|F(X)|/|X|_{\mathfrak{E}}) = |A|_{\mathfrak{E}^*}.$$

Таким образом, пространства  $\mathfrak{K}$ ,  $\mathfrak{E}_q$  ( $q^{-1} + p^{-1} = 1$ ),  $\mathfrak{E}_\pi$ ,  $\mathfrak{E}_\Pi$  эквивалентны пространствам, сопряженным соответственно к пространствам  $\mathfrak{E}_1$ ,  $\mathfrak{E}_p$  ( $1 < p < \infty$ ),  $\mathfrak{E}_\Pi^{(0)}$ ,  $\mathfrak{E}_\pi$ .

Новым в этой теореме является лишь утверждение, касающееся пространств  $\mathfrak{S}_\Pi$ ,  $\mathfrak{S}_\Pi^{(0)}$  и  $\mathfrak{S}_\pi$ ; остальные утверждения известны из работы И. Неймана и Р. Шаттена (1).

Пусть  $\mathfrak{S}$  — одно из введенных пространств; тогда множество  $\mathfrak{S}$  всех самосопряженных операторов из  $\mathfrak{S}$  является вещественным подпространством пространства  $\mathfrak{S}$ . Сопряженным к любому пространству  $\mathfrak{S}$  будет соответствующее пространство  $\mathfrak{S}^*$ . В пространстве  $\mathfrak{S}$  введем новую норму  $|H|_{\mathfrak{S},K}$ , топологически эквивалентную исходной, полагая  $|H|_{\mathfrak{S},K} = \max(|H^+|_{\mathfrak{S}}, |H^-|_{\mathfrak{S}})$ , где  $H^+$ ,  $H^-$  — взаимно ортогональные неотрицательные операторы, разность которых равна  $H$ . Этой норме в сопряженном пространстве будет отвечать норма  $|H|_{\mathfrak{S}^*,K^*} = |H^+|_{\mathfrak{S}^*} + |H^-|_{\mathfrak{S}^*}$ .

2. Замкнутое (в смысле сильной сходимости) множество ортогональных проекторов  $\mathfrak{P} = \{P\}$  назовем цепочкой, если оно содержит проекторы  $O$  и  $I$  и для любых двух проекторов  $P_1, P_2 \in \mathfrak{P}$  либо  $P_1 < P_2$ , либо  $P_2 < P_1$ . Пара проекторов  $(P_1, P_2)$  ( $P_1 < P_2$ ;  $P_{1,2} \in \mathfrak{P}$ ) называется разрывом цепочки  $\mathfrak{P}$ , если для любого проектора  $P \in \mathfrak{P}$  либо  $P \leq P_1$ , либо  $P \geq P_2$ .

Размерность подпространства  $(P_2 - P_1)\mathfrak{H}$  значений проектора  $P_2 - P_1$  называется размерностью разрыва  $(P_1, P_2)$ . Цепочка  $\mathfrak{P}$ , не имеющая ни одного разрыва, называется непрерывной.

Цепочка  $\mathfrak{P}$  называется максимальной, если она не является правильной частью никакой другой цепочки. Максимальная цепочка характеризуется тем, что либо она непрерывна, либо всякий ее разрыв одномерен.

Будем говорить, что цепочка  $\mathfrak{P}$  является собственной цепочкой оператора  $A$ , если все подпространства  $P\mathfrak{H}$  являются инвариантными относительно  $A$ , т. е.  $PAP = AP$  ( $P \in \mathfrak{P}$ ).

Всякий оператор  $A \in \mathfrak{S}_\infty$  обладает хотя бы одной собственной максимальной цепочкой (см. (2-4)).

Разбиением  $\sigma$  цепочки  $\mathfrak{P}$  назовем любую цепочку, состоящую из конечного числа проекторов  $P_0 < P_1 < \dots < P_n$  из  $\mathfrak{P}$ .

Пусть  $F(P)$  — произвольная оператор-функция, определенная на цепочке  $\mathfrak{P}$  и принимающая значения из  $\mathfrak{S}_\infty$ . Если для некоторого  $A \in \mathfrak{S}_\infty$  при любом  $\varepsilon > 0$  найдется разбиение  $\sigma_\varepsilon$  цепочки  $\mathfrak{P}$  такое, что для всех разбиений  $\sigma = \{P_j\}_0^n \supset \sigma_\varepsilon$

$$\left| \sum_{j=1}^n F(Q_j)(P_j - P_{j-1}) - A \right| < \varepsilon, \dots$$

каковы бы ни были при этом операторы  $Q_j \in \mathfrak{P}$ , удовлетворяющие неравенствам  $P_{j-1} \leq Q_j \leq P_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), то будем писать

$$A = \int_{\mathfrak{P}} F(P) dP$$

и будем говорить, что интеграл, стоящий справа, сходится.

Всякий вольтерров оператор  $Y$  (т. е. всякий вполне непрерывный оператор  $Y$  с единственной точкой спектра  $\lambda = 0$ ) допускает сходящееся по норме  $\mathfrak{S}_\infty$  представление

$$Y = 2i \int_{\mathfrak{P}} PX dP, \quad (1)$$

где  $X = Y_J = (X - X^*)$ ,  $2i$  — мнимая эрмитова компонента оператора  $Y$ , а  $\mathfrak{P}$  — произвольная максимальная собственная цепочка оператора  $Y^*$ .

\* Это предложение вытекает из теоремы М. С. Бродского (4), который вместо принятого здесь определения интеграла (1) по Шатуновскому исходил из определения, связанного с предварительной параметризацией цепочки  $\mathfrak{P}$ .

Обратно (ср. <sup>(4,5)</sup>), если для некоторого  $X = X^* \in \mathfrak{S}_\infty$  интеграл (1) сходится по норме  $\mathfrak{S}_\infty$ , то  $Y$  является единственным вольтерровым оператором, обладающим собственной цепочкой  $\mathfrak{P}$  и мнимой компонентой  $Y_J = X$ .

Необходимым условием для сходимости интеграла (1) является условие

$$(P - Q) \times (P - Q) = 0. \quad (2)$$

где  $(P, Q)$  — произвольный разрыв цепочки  $\mathfrak{P}$ .

Пусть  $\mathfrak{P}$  — произвольная непрерывная цепочка. Рассмотрим операторы

$$\mathcal{T}(X) = \mathcal{T}(X; \mathfrak{P}) = \int_{\mathfrak{P}} PX dP, \quad \mathcal{S}(X) = \mathcal{S}(X; \mathfrak{P}) = i \int_{\mathfrak{P}} (PX dP - dPXP).$$

Оба оператора замкнуты в  $\mathfrak{S}_\infty$  и имеют одну и ту же область определения  $\mathfrak{D}$ .

Для всех  $X \in \mathfrak{D}$   $\mathcal{T}(\mathcal{T}(X)) = X$  и  $\mathcal{S}(\mathcal{S}(X)) = X$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\mathfrak{S}_I$  — одно из пространств  $\mathfrak{S}_p$  ( $1 < p < \infty$ ),  $\mathfrak{S}_I^{(0)}$ ,  $\mathfrak{S}_\infty$ , а  $\mathfrak{S}_{II}$  — одно из пространств  $\mathfrak{S}_p$  ( $1 < p \leq \infty$ ),  $\mathfrak{S}_{II}^{(0)}$ . Если пространство  $\mathfrak{S}_I \subset \mathfrak{D}$  и отображается оператором  $\mathcal{T}$  непрерывно в пространство  $\mathfrak{S}_{II}$ , то  $\mathfrak{S}_I^* \subset \mathfrak{D}$  и отображается непрерывно оператором  $\mathcal{T}$  в пространство  $\mathfrak{S}_{II}^*$ . Обратно, если пространство  $\mathfrak{S}_{II}^* \subset \mathfrak{D}$  отображается оператором  $\mathcal{T}$  непрерывно в пространство  $\mathfrak{S}_I^*$  и выполняется дополнительное условие  $\mathcal{T}(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{S}_{II}$ , то  $\mathfrak{S}_I \subset \mathfrak{D}$  и отображается непрерывно оператором  $\mathcal{T}$  в пространство  $\mathfrak{S}_{II}$ .

В обоих случаях из двух операторов  $\mathcal{T}(\mathfrak{S}_I \rightarrow \mathfrak{S}_{II})$  и  $\mathcal{T}(\mathfrak{S}_{II}^* \rightarrow \mathfrak{S}_I^*)$ , порожденных оператором  $\mathcal{T}$  при этих отображениях, второй является сопряженным к первому.

В случае  $\mathfrak{S}_I = \mathfrak{S}_I$  теорема остается справедливой, если в ее формулировке пространство  $\mathfrak{S}_I^*$  заменить на  $\mathfrak{S}_\infty$ .

Точно такая же теорема имеет место для оператора  $\mathcal{S}$ .

3. Почти не изменяя рассуждений из теоремы 2 из <sup>(5)</sup>, можно получить следующее ее уточнение:

**Теорема 3.** Пусть  $A$  — вольтерров оператор с  $A_J \in \mathfrak{S}_I$ ; тогда

$$|A|_\Omega \leq \frac{4}{\pi} |A_J|_1, \quad |A_R|_{\Omega; K} \leq \frac{2}{\pi} |A_J|_1 \quad (A_R = \frac{1}{2}(A + A^*)). \quad (3)$$

Эти оценки точные и достигаются, когда  $A_J$  — одномерный оператор.

Добавим, что для любого самосопряженного оператора  $H \in \mathfrak{S}_I$  и произвольного  $\varepsilon > 0$  найдется вольтерров оператор  $A$  с  $A_J = H$  такой, что

$$|A|_\Omega \geq \frac{4}{\pi} |A_J|_1 - \varepsilon, \quad |A_R|_{\Omega; K} \geq \frac{2}{\pi} |A_J|_1 - \varepsilon.$$

Если оператор  $H = H^* \in \mathfrak{S}_I$  ( $H \in \mathfrak{S}_\infty$ ), то всегда найдется вольтерров оператор  $A \in \mathfrak{S}_\infty$  с  $A_J = H$ .

На основании теоремы Харди — Литтлвуда — Пойя — Вейля <sup>(6,7)</sup> из соотношений (3) вытекает, что

$$\sum_{j=1}^n f(s_j(A)) \leq \sum_{j=1}^n f\left(\frac{4|A_J|_1}{\pi(2j-1)}\right) \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n f(s_j(A_R^\pm)) \leq \sum_{j=1}^n f\left(\frac{2|A_J|_1}{\pi(2j-1)}\right) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (5)$$

где  $f(t)$  ( $0 \leq t < \infty$ ) — произвольная положительная выпуклая функция, для которой  $f(0) = 0$ . При одномерном  $A_J$  во всех соотношениях (4) и (5) имеет место знак равенства.

Отметим, наконец, что если  $X \in \mathfrak{S}_1$ , а  $\mathfrak{P}$  — произвольная цепочка, удовлетворяющая необходимому условию (2), то имеет место точная оценка  $|\mathcal{T}(X; \mathfrak{P})|_\Omega \leq |X|_1$ .

4. Сочетание теорем 1, 2 и 3 приводит к важному результату В. И. Мацаева, согласно которому для всякого самосопряженного (а значит, и несамосопряженного) оператора  $X \in \mathfrak{S}_\infty$  и любой цепочки  $\mathfrak{P}$ , удовлетворяющей условию (2), интеграл (1) сходится к некоторому оператору  $Y \in (\mathfrak{S}_\infty)^*$  и имеет место точная оценка

$$|\mathcal{S}(X)|_\infty = |Y_R|_\infty \leq \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{s_j(X^+) + s_j(X^-)}{2j-1} \quad (X = X^* \in \mathfrak{S}_\infty).$$

Этот результат был получен В. И. Мацаевым иным путем.

Неравенство  $|\mathcal{T}(X; \mathfrak{P})|_\Omega < |X|_1$  на основании теоремы 2 позволяет дополнить результат В. И. Мацаева следующей точной оценкой

$$|\mathcal{T}(X)|_\infty < |X|_\omega \quad (X \in \mathfrak{S}_\omega).$$

Молдавский филиал  
Академии наук СССР

Поступило  
23 XI 1960

Одесский инженерно-строительный  
институт

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> R. Schatten, A Theory of Cross-Spaces, Princeton, 1950. <sup>2</sup> Н. Аронштейн, Р. Смит, Математика, Сборн. пер., 2, № 1, 1958. <sup>3</sup> Л. А. Сахнович, Изв. Высших учебн. завед., Математика, № 1 (8) (1959). <sup>4</sup> М. С. Бродский, УМН, 16, в. 1 (1961). <sup>5</sup> И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, ДАН, 128, № 2 (1959). <sup>6</sup> H. Weyl, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 35, 408 (1949). <sup>7</sup> G. Polya, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 36, 49 (1950).

\* До этого сходимость интеграла (1) была установлена М. С. Бродским (<sup>4</sup>) для класса  $\mathfrak{S}_1$ ; авторами сперва для класса  $\mathfrak{S}_2$  (<sup>5</sup>), а затем для всех классов  $\mathfrak{S}_p$  ( $0 < p < \infty$ ). Последний результат вместе с результатами п. 2 докладывался авторами осенью 1959 г. на V Всесоюзной конференции по функциональному анализу в Баку.

А. А. ДЕЗИН

# РАЗЛИЧНЫЕ ТИПЫ ИНВАРИАНТНЫХ СИСТЕМ ПРОСТЕЙШЕЙ СТРУКТУРЫ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 18 XI 1960)

В статьях <sup>(1,2)</sup> были рассмотрены граничные задачи для инвариантных эллиптических и гиперболических систем, т. е. для систем, левая часть которых допускает запись с помощью оператора внешнего дифференцирования  $d$  и метрически сопряженного с  $d$  оператора  $\delta$  <sup>(3)</sup>. Операторы  $d$  и  $\delta$ , рассматриваемые в области эвклидова пространства, являются просто дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами <sup>(1)</sup>. Но при исследовании граничных задач их инвариантный характер, т. е. возможность задания их на произвольном римановом многообразии, оказывается весьма существенным.

Настоящая статья преследует цель показать, что запас инвариантных систем, допускающих изучение с помощью разработанных приемов, весьма широк и далеко не исчерпывается теми «строго эллиптическими» и «строго гиперболическими» случаями, которые были рассмотрены в <sup>(1,2,9)</sup>.

1. Параболические уравнения типа уравнений теплопроводности и «полураспавшиеся» параболические уравнения. Среди простейших систем первого порядка с двумя неизвестными функциями от двух независимых переменных, помимо систем

$$D_1^0 u + D_2^1 u = \dot{f}; \quad -D_1^1 u \pm D_2^0 u = \dot{f}; \quad D_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$$

(где плюс соответствует эллиптическому, а минус гиперболическому случаям, многомерные аналоги которых рассмотрены в <sup>(1,2)</sup>) встречаются системы

$$\begin{aligned} D_1^0 u - D_2^1 u &= \dot{f}, & D_1^0 u - D_2^1 u &= \dot{f}, \\ -D_1^1 u + D_2^0 u &= \dot{f}, & -D_1^1 u &= \dot{f}, \end{aligned} \quad (1)$$

где в первой каждое гладкое решение однородной системы удовлетворяет уравнению теплопроводности, а для второй («полураспавшейся») характерна следующая черта: хотя однозначная разрешимость (при соответствующих граничных условиях) записанных уравнений тривиальна, обычное энергетическое неравенство (оценивающее  $L_2$ -норму решения через  $L_2$ -норму правой части) для нее не может быть установлено <sup>(4)</sup>.

Аналогом первой из систем (1) при произвольном  $n$  (числе независимых переменных) является система ( $n$  четно)

$$\begin{aligned} du^0 + \delta u^2 - \partial u^1 &= \dot{f}, & du^1 + u^0 &= \dot{f}, \\ du^2 + \delta u^4 - \partial u^3 &= \dot{f}, & du^1 + \delta u^3 + u^2 &= \dot{f}, \\ \dots & & \dots & \\ du^{n-4} + \delta u^{n-2} - \partial u^{n-3} &= \dot{f}, & du^{n-3} + \delta u^{n-1} + u^{n-2} &= \dot{f}, \\ du^{n-2} - \partial u^{n-1} &= \dot{f} \end{aligned} \quad (P)$$

где, как и в <sup>(2)</sup>,  $\partial \equiv \partial / \partial x^n$ , а операторы  $d, \delta$  действуют по переменным  $x^1, \dots, x^{n-1}$  на коварианты (системы функций)  $\overset{p}{u}$ , зависящие от  $x^n$  как от параметра. Нетрудно проверить, что каждое гладкое решение однородной системы (Р) удовлетворяет уравнению  $(d\delta + \delta d)\overset{p}{u} + \partial\overset{p}{u} = 0$ , т. е. каждая компонента коварианты  $\overset{p}{u}$  удовлетворяет уравнению теплопроводности.

Интересно отметить, что системы (Р) и системы (Т), приведенные в <sup>(2)</sup>, вскрывают связь между эллиптическим и параболическим или гиперболическим случаями для систем 1-го порядка. Известно, что если просто приписать производные по «времени» к системе Коши — Римана, то получится «нехорошая» система, не принадлежащая ни к одному из классических типов. Между тем, если обозначить через  $K$  эллиптический оператор левой части системы (К) в <sup>(1)</sup>, действующий в  $(n-1)$ -мерном пространстве, а через  $K^*$  — формально сопряженный оператор, обозначить  $\dot{u}, \ddot{u}$  совокупности всех ковариант нечетной или четной степени соответственно (по-прежнему рассматриваемых в  $(n-1)$ -мерном пространстве и зависящих от  $x^n$  как от параметра), то система (Р) может быть записана кратко в виде

$$K\ddot{u} - \partial\dot{u} = \dot{f}, \quad K^*\dot{u} + \ddot{u} = \ddot{f}, \quad (Р)$$

а система (Т) из <sup>(2)</sup> в виде

$$K\ddot{u} - \partial\dot{u} = \dot{f}, \quad K^*\dot{u} + \partial\ddot{u} = \ddot{f}. \quad (Т)$$

Система, являющаяся обобщением второй из систем (1), во введенных обозначениях имеет вид

$$K\ddot{u} - \partial\dot{u} = \dot{f}, \quad K^*\dot{u} = \ddot{f}. \quad (\hat{Р})$$

Кроме того, можно рассматривать системы, получающиеся из (Р) заменой некоторых из  $\overset{p}{\partial u}$  на  $\overset{p}{u}$  в левом столбце или, наоборот, некоторых  $\overset{p}{u}$  на  $\overset{p}{\partial u}$  в правом столбце. В первом случае мы будем получать «более эллиптические» системы и, в пределе, заменив все  $\overset{p}{\partial u}$  на  $\overset{p}{u}$ , получим (считая, что  $u$  не зависит от  $x^n$ ) неоднородную эллиптическую систему, охватывающую одновременно все коварианты как четной, так и нечетной степени. При замене  $\overset{p}{u}$  на  $\overset{p}{\partial u}$  получается «более гиперболическая» система, дающая в пределе систему (Т). Аналогично можно рассмотреть и системы, занимающие промежуточное положение между системами (Р) и  $(\hat{Р})$ .

Для всех перечисленных систем могут быть указаны корректные граничные задачи в области евклидова пространства вида  $V \times e$ , где  $V$  — область с гладкой границей, а  $e$  — единичный отрезок. Доказательство теорем существования и единственности обобщенного решения проводится по тому же плану, что и в <sup>(2)</sup>:  $V$  дополняется до замкнутого риманова многообразия  $M$ , на  $M \times e$  устанавливается однозначная разрешимость системы, а переход к граничной задаче в исходной области осуществляется рассмотрением подпространств четных или нечетных ковариант.

Чтобы пояснить сказанное, приведем явную запись системы  $(Р_3)$  ( $n=3$ ). Она имеет вид:

$$\begin{aligned} D_1 \overset{0}{u} + D_2 \overset{2}{u} - D_3 u_1 &= \dot{f}_1, & -D_1 u_1 - D_2 u_2 + \overset{0}{u} &= \dot{f}, \\ D_2 \overset{0}{u} - D_1 \overset{2}{u} - D_3 u_2 &= \dot{f}_2, & D_1 u_2 - D_2 u_1 + \overset{2}{u} &= \ddot{f}. \end{aligned} \quad (Р_3)$$

Если во второй паре уравнений зачеркнуть  $\overset{0}{u}, \overset{2}{u}$ , получатся уравнения  $(\hat{P}_3)$ ; если заменить  $\overset{0}{u}, \overset{2}{u}$  на  $D_3 \overset{0}{u}, D_3 \overset{2}{u}$ , получится гиперболическая система  $(T_3)$ . Если в первой паре уравнений заменить  $D_3 \overset{0}{u}_1, D_3 \overset{2}{u}_2$  на  $u_1, u_2$  и считать, что  $u$  не зависит от  $x^3$ , получится эллиптическая система с характеристическим определителем  $(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2$ . Если зачеркнуть члены с производной  $D_3$  и члены  $\overset{0}{u}, \overset{2}{u}$  во второй паре, то произойдет расщепление на две формально сопряженные (при  $n \neq 2$  отличающиеся лишь знаком) системы Коши — Римана.

Если  $V$  — круг плоскости  $x^1, x^2$  с границей  $S$ , то для системы  $(P_3)$ , например, однозначно разрешима при любой правой части из  $L_2$  задача с граничными условиями

$$\overset{2}{u}|_S = u_1 \cos \varphi + u_2 \sin \varphi|_S = 0; \quad (G_5)$$

$$u_1|_{x^3=0} = u_2|_{x^3=0} = 0, \quad (G)$$

где  $\varphi$  — полярный угол. При замене  $\overset{0}{u}$  на  $D_3 \overset{0}{u}$  добавляется условие  $\overset{0}{u}|_{x^3=0} = 0$ , при замене  $D_3 \overset{2}{u}_1$  на  $u_1$  снимается первое из условий  $(G)$ .

2. Системы со структурой, не зависящей от размерности пространства. Для всех рассмотренных систем  $(K)$ ,  $(T)$ ,  $(P)$ ,  $(\hat{P})$  была характерна следующая черта: свойства их при любом  $n$  оставались неизменными, но вид уравнений при переходе от  $n$  к  $n+1$  менялся, так как менялось, например, число входящих в систему ковариант. Между тем, поскольку операторы  $d$  и  $\delta$  определены при любом  $n$ , всякая записанная с их помощью в  $n$ -мерном пространстве система автоматически дает некоторую новую систему в  $(n+1)$ -мерном случае. Правда, системы, полученные таким образом из систем  $(K)$ , уже не будут обладать свойством однозначной разрешимости при любой правой части из  $L_2$  (ср. <sup>(5)</sup>), но для «продолженных» систем  $(T)$ ,  $(P)$ ,  $(\hat{P})$  нетрудно указать корректные граничные задачи. Заметив еще, что если не отождествлять  $n$  в указанных системах с размерностью пространства, то низшая степень входящих в систему ковариант может быть больше нуля, можем связать с системой  $(P)$ , например, следующие системы ( $i$  нечетно).

$$\begin{aligned} d \overset{p}{\omega} + \delta \overset{p+2}{\omega} - \partial \overset{p+1}{\omega} &= \overset{p+1}{f}, & \delta \overset{p+1}{\omega} + \overset{p}{\omega} &= \overset{p}{f}, \\ \dots \dots \dots & & d \overset{p+1}{\omega} + \delta \overset{p+3}{\omega} + \overset{p+2}{\omega} &= \overset{p+2}{f}, \\ d \overset{p+i-3}{\omega} + \delta \overset{p+i-1}{\omega} - \partial \overset{p+i-2}{\omega} &= \overset{p+i-2}{f}, & \dots \dots \dots & \\ d \overset{p+i-1}{\omega} - \partial \overset{p+i}{\omega} &= \overset{p+i}{f}; & d \overset{p+i-2}{\omega} + \delta \overset{p+i}{\omega} + \overset{p+i-1}{\omega} &= \overset{p+i-1}{f}, \end{aligned} \quad (P_i^p)$$

где  $i$  может принимать значения  $1, \dots, n-p$ , а  $p$  — значения  $0, 1, \dots, n-i$ . Аналогичные «двухиндексные варианты» могут быть выписаны для систем  $(T)$  и  $(\hat{P})$ . Как отмечалось, для всех таких систем могут быть указаны корректные граничные задачи.

3. Два классических примера. Поскольку дифференциальные операторы классического векторного анализа являются частными примерами операторов  $d, \delta$ , естественно поставить вопрос, как выглядят линейные системы уравнений 1-го порядка, встречающиеся в различных разделах физики и записываемые в векторной форме, с точки зрения проводившихся рассуждений. В качестве частичного ответа на этот вопрос приведем два примера.

Первый — уравнения Максвелла. Записанные в так называемой 4-мерной форме, т. е. для кососимметрического тензора электромагнитного

оля  $F_{ik}^{(6)}$ , в случае поля в пустоте при отсутствии зарядов они имеют вид (константы положены равными 1)

$$d\overset{2}{F} = 0; \quad \delta\overset{2}{F} = 0, \quad (2)$$

где оператор  $\delta$  вычислен в лоренцевой метрике. Проведенное в  $(^2)$  расщепление (при наличии времени) операторов  $d$  и  $\delta$  в точности соответствует переходу от уравнений (2) к их обычной 3-мерной форме, в инвариантной записи имеющей вид

$$\begin{aligned} \overset{1}{\partial}u + * \overset{1}{d}v &= 0, & \overset{1}{\partial}v - * \overset{1}{d}u &= 0, \\ d * u &= 0; & \delta v &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

При переходе от (2) к (3) мы положили  $\overset{2}{F} = (\overset{2}{u}, \overset{1}{v})^{(2)}$  и, чтобы иметь дело только с векторами или 1-ковариантами,  $u = * u^{(3)}$ . Верхние уравнения (3) дают обычные соотношения для роторов, а нижние — равенство нулю дивергенций.

Второй пример — уравнения гидродинамики (линеаризованные) для вращающейся жидкости  $(^7, ^8)$ . В наших обозначениях они имеют вид

$$\overset{1}{\partial}v - * (\overset{1}{v} \wedge \overset{1}{k}) + d\overset{0}{p} = \overset{1}{f}; \quad \eta d\overset{0}{p} - \delta v = \overset{0}{f}, \quad (4)$$

где  $\eta = 0$  в случае несжимаемой жидкости и  $\eta = 1$  для сжимаемой;  $\overset{1}{v}$  и  $\overset{0}{p}$  неизвестные;  $\overset{1}{k}$  — заданный вектор, не зависящий от времени.

Разработанные приемы исследования инвариантных систем оказываются весьма удобными при рассмотрении граничных задач для уравнений (2) — (4) и некоторых их обобщений.

Математический институт им. В. А. Стеклова  
Академии наук СССР

Поступило  
11 XI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> А. А. Дезин, ДАН, 132, № 6 (1960). <sup>2</sup> А. А. Дезин, ДАН, 135, № 5 (1960).  
<sup>3</sup> Ж. де Рам, Дифференцируемые многообразия, ИЛ, 1956. <sup>4</sup> А. А. Дезин, УМН, 14, № 3, 21 (1959). <sup>5</sup> А. А. Дезин, ДАН, 127, № 3 (1959). <sup>6</sup> Л. Ландау, Е. Лившиц, Теория поля, М., 1959. <sup>7</sup> С. Л. Соболев, Изв. АН СССР, сер. матем., 18, 3 (1954). <sup>8</sup> В. Н. Масленникова, Изв. АН СССР, сер. матем., 22, 135 (1958). <sup>9</sup> А. А. Дезин, Сибирск. матем. журн., 1, № 4, 578 (1960).

Е. Б. ДЫНКИН и М. Б. МАЛЮТОВ

# СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДЕНИЕ НА ГРУППАХ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ОБРАЗУЮЩИХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 XI 1960)

1. Пусть  $G$  — группа с конечным числом образующих  $a_1, a_2, \dots, a_m$ . Положим  $a_{-i} = a_i^{-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Пусть заданы положительные числа  $p_i$  ( $i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$ ) такие, что  $\sum_{i=-m}^m p_i = 1$ . Случайным блужданием на группе  $G$  мы называем цепь Маркова с фазовым пространством  $G$  и вероятностями перехода  $p(g, h) = p_i$ , если  $h = ga_i$  ( $i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$ );  $p(g, h) = 0$  в остальных случаях. В частности, если образующие  $a_1, a_2, \dots, a_m$  коммутируют между собой и между ними нет никаких других соотношений, мы получаем изучавшееся многими авторами случайное блуждение по  $m$ -мерной решетке.

В заметке для случайного блуждения на группах с конечным числом образующих изучается граница Мартина и строятся все положительные гармонические функции. Кроме того доказывается одна общая теорема о гармонических функциях на множествах с транзитивной нильпотентной группой преобразований.

2. Пусть  $E$  — некоторое конечное или счетное множество. Рассмотрим однородную цепь Маркова на  $E$  с вероятностями перехода  $p(x, y)$  ( $x, y \in E$ ,  $p(x, y) \geq 0$ ,  $\sum_{y \in E} p(x, y) = 1$  для всех  $x \in E$ ). Функция  $f(x)$  на  $E$  называется гармонической (относительно  $p(x, y)$ ), если для любого  $x \in E$   $\sum_{y \in E} p(x, y) f(y) = f(x)$ .

Теорема 1\*\*. Пусть  $G$  — нильпотентная группа, транзитивно действующая на множестве  $E$ . Пусть на  $E$  задана неприводимая цепь Маркова с вероятностями перехода  $p(x, y)$ , инвариантными относительно  $G$  (т. е.  $p(gx, gy) = p(x, y)$  для всех  $g \in G$ ,  $x, y \in E$ ). Тогда всякая ограниченная гармоническая функция на  $E$  постоянна.

Доказательство основано на следующей лемме:

Лемма 1. Если  $G$  — произвольная группа, а все остальные условия теоремы 1 выполнены, то любая ограниченная гармоническая функция на  $E$  постоянна на классах транзитивности  $E$  относительно центра  $Z$  группы  $G$ .

Доказательство леммы. Если  $f(x)$  — гармоническая функция и  $|f(x)| < C$  для всех  $x \in E$ , то для каждого  $g \in Z$   $\varphi(x) = f(x) - f(gx)$  также гармоническая функция, причем при любых  $x \in E$  и  $m > 0$   $\left| \sum_{h=0}^m \varphi(g^h x) \right| = |f(x) - f(g^{m+1} x)| < 2C$ .

\* Определения алгебраических понятий, использованных в настоящей заметке, см., например, в (2).

\*\* Для случая, когда  $E$  —  $m$ -мерная решетка, а  $G$  — группа всех ее параллельных переносов, эта теорема была доказана А. М. Леонтовичем.

Допустим, что  $\sup_{y \in E} \varphi(y) = M > 0$  (аналогично рассматривается случай  $\sup_{y \in E} (-\varphi(y)) = -\inf_{y \in E} \varphi(y) > 0$ ). Возьмем  $N$  так, чтобы  $N \cdot M/2 > 2C$ . Для любого  $n < N$  найдется такое  $k_n > 0$ , что  $p^{(k_n)}(x, g^n x) = p_n > 0$  для любого  $x \in E$  ( $p^{(k)}(x, y)$  обозначает вероятность перехода из  $x$  в  $y$  за  $k$  шагов). Обозначим  $p = \min_{n < N} p_n$ . Пусть  $\varphi(x) > (1 - p/2)M$ . Тогда получим  $(1 - \frac{p}{2})M < \varphi(x) = \sum_{y \in E} p^{(k_n)}(x, y) \varphi(y) \leq p \varphi(g^n x) + (1 - p)M$  ( $n < N$ ), откуда  $\varphi(g^n x) > M/2$  ( $n < N$ ). Значит,  $\sum_{k=0}^{N-1} \varphi(g^k x) > 2C$ , и мы получили противоречие.

Доказательство теоремы. Образует последовательность групп  $G_i = G_{i-1}/Z_{i-1}$ , где  $Z_{i-1}$  — центр группы  $G_{i-1}$  (мы считаем  $G_0 = G$ ). Группа называется нильпотентной группой класса  $n$ , если  $G_n = \{e\}$ , хотя  $G_{n-1} \neq \{e\}$ . Будем вести доказательство индукцией по  $n$ . При  $n=0$   $G = \{e\}$ , пространство  $E$  состоит из одной точки и утверждение теоремы тривиально. Допустим, что для всех  $n < N$  теорема верна. Докажем теорему для  $n = N$ . Для этого заметим, что  $\tilde{G} = G/Z$  является нильпотентной группой класса  $N-1$ . Назовем орбитами группы  $Z$  подмножества пространства  $E$ , имеющие вид  $Zx$  ( $x \in E$ ). Обозначим множество орбит через  $\tilde{E}$ . Заметим, что сумма  $\sum_{z \in Z} p(x, zy)$  зависит лишь от орбит  $Zx, Zy$ , но не от самих элементов  $x, y$ . Обозначим эту сумму через  $\tilde{p}(Zx, Zy)$ . Функция  $\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y})$  ( $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{E}$ ) неотрицательна и для любого  $\tilde{x} \in \tilde{E}$   $\sum_{\tilde{y} \in \tilde{E}} \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 1$ . Ее можно рассматривать как переходную функцию

некоторой неприводимой цепи Маркова в пространстве  $\tilde{E}$ . Группа  $\tilde{G}$  действует транзитивно в  $\tilde{E}$  и оставляет инвариантной функцию  $\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y})$ . Пусть на  $E$  дана ограниченная гармоническая функция  $f(x)$ . По лемме 1 она постоянна на каждой орбите  $Z$ . Поэтому формула  $\tilde{f}(Zx) = \tilde{f}(\tilde{x})$  определяет функцию на  $\tilde{E}$ . Эта функция ограничена и гармоническая относительно  $\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y})$ . По предположению индукции она постоянна. Следовательно, функция  $f(x)$  постоянна на  $E$ .

Теорема 1 перестает быть верной, если отбросить требование нильпотентности группы  $G$ . Так, для случайного блуждания на свободной группе с  $m$  образующими ( $m > 1$ ), где для всех  $i$   $p_i = 1/2m$ , можно определить непостоянную ограниченную гармоническую функцию формулой

$$f(e) = 0; \quad f(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2m-1)^k}, \quad \text{если } i_1 > 0;$$

$$f(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2m-1)^k}, \quad \text{если } i_1 < 0,$$

где  $a_i, \dots, a_{i_n}$  — минимальная запись элемента  $g^*$ .

3. Обозначим через  $u(x, y)$  вероятность, выйдя из  $x$ , когда-нибудь попасть в  $y$ . Для случайного блуждания по группе с конечным числом образующих вероятность  $u(x, y)$  инвариантна относительно левых сдвигов  $u(gx, gy) = u(x, y)$ .

Теорема 2. Случайное блуждание на свободной группе с  $m > 1$  образующими — невозвратная цепь Маркова. Вероятности  $u_i = u(e, a_i)$

\* Мы говорим, что  $a_{i_1} \dots a_{i_n}$  есть минимальная запись элемента  $g$ , если  $g = a_{i_1} \dots a_{i_n}$  и  $g$  нельзя представить в виде произведения меньшего чем  $n$  числа образующих.

образуют единственное в области  $U = \{0 < v_i < 1; i = \pm 1, \dots, \pm m\}$  решение системы уравнений

$$v_i = p_i + v_i \sum_{j=i}^m p_j v_{-j} \quad (i = \pm 1, \dots, \pm m). \quad (1)$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что вероятности  $u_i$  удовлетворяют системе (1) и, если цепь невозвратна, то  $\{u_i\} \in U$ . Положим

$$F(x) = 1 + (m-1)x - \sum_{i=1}^m \sqrt{x^2 + 4p_i p_{-i}}, \quad v_i(x) = \frac{1}{2p_{-i}} (-x + \sqrt{x^2 + 4p_i p_{-i}}).$$

Легко проверить, что если  $F(\gamma) = 0$ , то  $v_i(\gamma)$  ( $i = \pm 1, \dots, \pm m$ ) — решение системы (1). Заметим, что  $F(x)$  выпукла вверх,  $F(0) \geq 0$ ,  $F'(0) > 0$ ,  $F(1) < 0$ . Поэтому найдется одно и только одно число  $\gamma \in (0, 1)$  такое, что  $F(\gamma) = 0$ . Всевозможные наборы вероятностей  $p_i$  ( $i = \pm 1, \dots, \pm m$ ) заполняют  $(2m-1)$ -мерный открытый симплекс  $T$ . Нетрудно показать, что  $\gamma = \gamma(p)$  является непрерывной функцией от  $p \in T$ . Стало быть, непрерывны также функции  $\tilde{v}_i(p) = v_i[\gamma(p)]$ . Очевидно,  $\tilde{v}_i(p) > 0$  для всех  $p$ .

Обозначим через  $q$  точку  $T$  с координатами  $p_i = 1/2m$  ( $i = \pm 1, \dots, \pm m$ ).

Непосредственно проверяется, что  $\tilde{v}(q) = \max_i \tilde{v}_i(q) = 1/(2m-1)$ . Пока-

жем, что  $\tilde{v}(p) < 1$  для всех  $p$ . Действительно, в противном случае мы имели бы  $\tilde{v}(p^0) = 1$  для некоторого  $p^0 \in T$ . Из системы (1) вытекает, что  $\tilde{v}_i(p^0) = 1$  для всех  $i$ . Нетрудно показать, что для всех  $x$   $1 - \sum_{i=-m}^m p_i v_{-i}(x) = x$ .

Полагая  $x = \gamma(p^0)$ , имеем  $1 - \sum p_i = 1 - \sum p_i \tilde{v}_{-i}(p^0) = \gamma(p^0) > 0$ , что противоречит предположению. Итак,  $v_i(\gamma)$  образуют решение системы (1), принадлежащее области  $U$ . Пусть теперь  $v_i$  — произвольное решение системы (1) из области  $U$ . Положим  $\gamma = 1 - \sum p_i v_{-i}$ . Легко видеть, что  $0 < \gamma < 1$  и  $F(\gamma) = 0$ . Значит,  $v_i = v_i(\gamma)$ .

Пусть  $\{v_i\} \in U$  — решение системы (1). Положим  $v_{i_1 \dots i_k} = v_{i_1} \dots v_{i_k}$  и определим функцию  $f(g)$  ( $g \in G$ ) формулами:  $f(e) = 1$ ;  $f(g) = v_{-i_1 \dots -i_n}$ ,

$$\text{если } v_{i_1} > v_{-i_1} \text{ или если } v_{i_1} = v_{-i_1}, i_1 < 0; f(g) = \frac{2m-2}{m} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{v_{-i_{k+1} \dots -i_n}}{v_{i_1 \dots i_k} (2m-1)^k} + \\ + \frac{1}{m} v_{-i_1 \dots -i_n} + \frac{1}{m(2m-1)^{n-1}} \frac{1}{v_{i_1 \dots i_n}} \text{ в остальных случаях } (a_{i_1} \dots a_{i_n} -$$

минимальная запись  $g$ ). Нетрудно видеть, что  $f$  — непостоянная положительная гармоническая функция. Поэтому (см. (1), стр. 446) рассматриваемое случайное блуждание невозвратно.

4. Пусть  $G$  — группа с конечным числом образующих. Предположим, что случайное блуждание на  $G$  невозвратно. Рассмотрим его траекторию  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  и выберем для каждого элемента  $x_n$  какую-нибудь его минимальную запись. Траектория с вероятностью 1 лишь конечное число раз попадает в  $e$ , поэтому найдется такой номер  $n_1$ , что минимальная запись всех  $x_n$  при  $n > n_1$  начинается с одной и той же образующей  $a_{i_1}$ . После момента  $n_1$  траектория лишь конечное число раз попадает в  $a_{i_1}$ , поэтому, начиная с некоторого момента  $n_2$ , перестает меняться вторая образующая  $a_{i_2}$  и т. д. Естественно назвать бесконечное слово  $\xi = a_{i_1} a_{i_2} \dots$  точкой границы, и считать, что последовательность  $x_n$  сходится к  $\xi$ . Бесконечные слова (так же как и конечные) подвергаются естественной идентификации, вытекающей из заданных соотношений между образующими. В силу этой идентификации предел последовательности  $x_n$  не зависит от выбора минимальной записи для элементов  $x_m$ .

5. Метрика Мартина в фазовом пространстве  $E$  произвольной непримкнутой счетной цепи Маркова задается формулой

$$d(x, y) = \sum_{z \in E} \left| \frac{u(c, z) u(z, x)}{u(c, x)} - \frac{u(c, z) u(z, y)}{u(c, y)} \right| \lambda(z), \quad (2)$$

где  $c$  — некоторый элемент  $E$ ,  $\lambda(z) > 0$  и  $\sum_{z \in E} \lambda(z) < \infty$ . Фазовое пространство пополняется по этой метрике. Разность  $\Gamma$  между пополнением  $E$  и  $E$  называется границей Мартина <sup>(1)</sup>.

Легко показать, что для случайного блуждания на свободной группе с  $m$  образующими расстояние Мартина \* между двумя последовательностями элементов стремится к нулю тогда и только тогда, когда число совпадающих сначала образующих в минимальной записи элементов последовательностей стремится к бесконечности. Отсюда следует, что граница Мартина совпадает с границей, построенной в п<sup>о</sup> 4.

6. Теорема 3. Положительные гармонические функции для случайного блуждания на свободной группе с  $m$  образующими получаются по формуле:

$$f(e) = v,$$

$$f(a_{i_1} \dots a_{i_n}) = \sum_{k=0}^{n-1} u_{i_1}^{-1} \dots u_{i_k}^{-1} u_{-i_{k+1}} \dots u_{-i_n} \mu_{i_1 \dots i_{k+1}} + u_{i_1}^{-1} u_{i_n}^{-1} v_{i_1 \dots i_n} \quad (3)$$

$$(i_k + i_{k+1} \neq 0),$$

где

$$v = \sum_{i=-m}^m v_i, \quad v_{i_1 \dots i_{k-1}} = \sum_{i_k=-m}^m v_{i_1 \dots i_k} \quad (k > 1), \quad v_{i_1 \dots i_k} \geq 0,$$

$$\mu_i = v - v_i, \quad \mu_{i_1 \dots i_k} = v_{i_1 \dots i_{k-1}} - v_{i_1 \dots i_k} \quad (k > 1).$$

Доказательство. Согласно <sup>(1)</sup> все положительные гармонические функции получаются по формуле

$$f(x) = \int_{\Gamma} \lim_{y \rightarrow \xi} \frac{u(x, y)}{u(e, y)} \mu(d\xi), \quad (4)$$

где  $\mu$  — произвольная конечная мера на борелевских подмножествах границы  $\Gamma$ . Каждый элемент  $\xi$  из  $\Gamma$  однозначно записывается в виде  $a_{j_1} \dots a_{j_k} \dots$ , где  $j_k + j_{k+1} \neq 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Положим  $\xi \in A_{i_1 \dots i_k}$ , если в этой записи  $j_1 = i_1, \dots, j_n = i_n$ . Пусть  $B_{i_1} = \Gamma \setminus A_{i_1}$ ,  $B_{i_1 \dots i_k} = A_{i_1 \dots i_{k-1}} \setminus A_{i_1 \dots i_k}$ .

Пусть  $x = a_{i_1} \dots a_{i_n}$ . Тогда подынтегральная функция в (4) равна  $u_{i_1}^{-1} \dots u_{i_k}^{-1} u_{-i_{k+1}} \dots u_{-i_n}$  на  $B_{i_1 \dots i_k}$  ( $k = 1, \dots, n-1$ ) и равна  $u_{i_1}^{-1} \dots u_{i_n}^{-1}$  на  $A_{i_1 \dots i_n}$ . Полагая  $v = \mu(\Gamma)$ ,  $v_{i_1 \dots i_k} = \mu(A_{i_1 \dots i_k})$ , имеем (3).

Замечание. Всякая группа  $G$  с образующими  $a_1, \dots, a_m$  изоморфна фактор-группе свободной группы  $\tilde{G}$  с теми же образующими по некоторому нормальному делителю  $N$ . Множество всех гармонических функций на  $G$  получается, если рассмотреть гармонические функции на  $\tilde{G}$ , постоянные на классах смежности  $\tilde{G}$  по  $N$ .

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

Поступило  
16 XI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> J. L. D o o b, J. Math. and Mech., 8, 3, 433 (1959). <sup>2</sup> А. Г. К у р о ш, Теория групп, М., 1953.

\* За  $c$  в формуле (2) принята единица  $e$  группы.

И. А. ИБРАГИМОВ

# О СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СТАЦИОНАРНЫХ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 XI 1960)

1. Пусть  $x(t)$  — стационарный гауссовский процесс. Обозначим через  $\mathfrak{M}_a^b$   $\sigma$ -алгебру событий, порожденную величинами  $x(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ . Говорят, что процесс  $x(t)$  обладает свойством сильного перемешивания <sup>(1)</sup>, если при  $\tau \rightarrow \infty$

$$\sup_{A \in \mathfrak{M}_{-\infty}^0, B \in \mathfrak{M}_{\tau}^{\infty}} |\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| = \alpha(\tau) \downarrow 0. \quad (1)$$

Выполнение (1) означает, что при больших  $\tau$  события, определяемые началом и концом процесса  $x(t)$ , становятся слабо зависимыми.

В работах автора <sup>(2,3)</sup> использовалось также следующее условие ослабления зависимости между  $\mathfrak{M}_{-\infty}^0$ ,  $\mathfrak{M}_{\tau}^{\infty}$ : для любого  $B \in \mathfrak{M}_{\tau}^{\infty}$  с вероятностью 1

$$|\mathbf{P}(B | \mathfrak{M}_{-\infty}^0) - \mathbf{P}(B)| \leq \varphi(\tau) \downarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow \infty. \quad (2)$$

В настоящей заметке формулируется ряд теорем о свойствах спектральной функции  $F(\lambda)$  гауссовского процесса  $x(t)$ , удовлетворяющего требованиям (1) или (2). Так как спектральная функция  $F(\lambda)$  гауссовского процесса, обладающего свойством (1) или (2), абсолютно непрерывна, ниже всюду будет идти речь не о ней, а о спектральной плотности (с. п.)  $f(\lambda) = F'(\lambda)$  процесса.

2. Теорема 1. Для того чтобы стационарный гауссовский процесс  $x(t)$  удовлетворял условию (2), необходимо и достаточно, чтобы при достаточно больших  $\tau$ ,  $\tau > \tau_0$ ,  $\sigma$ -алгебры  $\mathfrak{M}_{-\infty}^0$ ,  $\mathfrak{M}_{\tau}^{\infty}$  были независимы.

Пересказывая условие независимости  $\sigma$ -алгебр  $\mathfrak{M}_{-\infty}^0$ ,  $\mathfrak{M}_{\tau}^{\infty}$  на спектральном языке, приходим к следующему варианту теоремы 1:

Теорема 1'. Для того чтобы функция  $f(\lambda)$  была с. п. стационарного гауссовского процесса, удовлетворяющего условию (2), необходимо и достаточно, чтобы она была квадратом модуля некоторого тригонометрического полинома — в дискретном случае, или чтобы она была целой трансцендентной функцией экспоненциального типа с показателями  $\leq \sigma < \infty$ , неотрицательной и суммируемой на  $(-\infty, \infty)$ , — в случае непрерывного времени.

3. Теорема 2. Спектральная плотность  $f(\lambda)$  стационарного гауссовского процесса  $x(t)$ , обладающего свойством сильного перемешивания, не имеет разрывов первого рода.

При доказательстве этой и следующих теорем существенным образом используется полученное в <sup>(4)</sup> неравенство

$$\alpha(\tau) \leq \rho(\tau) \leq 2\pi\alpha(\tau),$$

$$\rho(\tau) = \sup_{\xi \in \mathfrak{M}_{-\infty}^0, \eta \in \mathfrak{M}_{\tau}^{\infty}} \frac{\mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)(\eta - \mathbf{E}\eta)}{\sqrt{\mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)^2 \mathbf{E}(\eta - \mathbf{E}\eta)^2}} \quad (3)$$

где через  $\hat{\mathfrak{M}}_a^b$  обозначена замкнутая линейная оболочка (в среднем квадратичном) величин  $x(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ .

Теорема 3. Если  $f(\lambda)$  — с. п. стационарного гауссовского процесса  $x(t)$ , обладающего свойством сильного перемешивания, то для всех  $\delta > 0$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f(\lambda) |\lambda - \lambda_0|^\delta = 0,$$

иными словами, невозможно, чтобы

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f(\lambda) |\lambda - \lambda_0|^\delta = \infty.$$

Более того, если на некотором множестве  $\Lambda$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0, \lambda \in \Lambda} f(\lambda) |\lambda - \lambda_0|^\delta = \infty,$$

то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{mes}(\Lambda \cap (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon))}{2\varepsilon} = 0. \quad (1)$$

4. Назовем порядком, верхним порядком, нижним порядком нуля  $\lambda_0$  функции  $f(\lambda)$  соответственно:

$$k(\lambda_0) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{\log f(\lambda)}{\log |\lambda - \lambda_0|},$$

$$\bar{k}(\lambda_0) = \overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{\log f(\lambda)}{\log |\lambda - \lambda_0|},$$

$$\underline{k}(\lambda_0) = \underline{\lim}_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{\log f(\lambda)}{\log |\lambda - \lambda_0|}^*.$$

Теорема 4. Если  $f(\lambda)$  — с. п. стационарного гауссовского процесса, обладающего свойством сильного перемешивания, то между верхним и нижним порядком нуля  $\lambda_0$  функции  $f(\lambda)$  непременно лежит целое четное число

$$\underline{k}(\lambda_0) \leq 2n \leq \bar{k}(\lambda_0), \quad n = 0, 1, \dots, \infty,$$

т. е. настоящий порядок нуля  $\lambda_0$   $k(\lambda_0)$  может быть только целым и четным \*\*.

Замечание. Если  $x(t)$  — стационарный гауссовский процесс, обладающий свойством сильного перемешивания, то с помощью (3) легко показать, что найдется такой промежуток  $(-T, T)$ , что

$$\inf_{\xi} \mathbf{E} |x(0) - \xi|^2 = \sigma_T^2 > 0,$$

где  $\inf$  берется по всем  $\xi$ , принадлежащим замкнутой (в среднем квадратичном) линейной оболочке величин  $x(t)$ ,  $t \geq T$ .

Поэтому из результатов А. М. Яглома <sup>(5)</sup> для процессов с дискретным временем получается следующая дополнительная характеристика нулей их с. п.:

Если  $f(\lambda)$  — с. п. стационарного гауссовского процесса  $x(t)$  с дискретным временем,  $t = \dots, -1, 0, 1, \dots$ , обладающего свойством сильного перемешивания, то существует такой полином

$$P(e^{i\lambda}) = \sum_{0 \leq k < T} \alpha_k e^{i\lambda k},$$

\* Это определение мне указал А. Н. Колмогоров.

\*\* Приводимая здесь формулировка теоремы 4 принадлежит А. Н. Колмогорову.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|P(e^{i\lambda})|^2}{f(\lambda)} d\lambda < \infty.$$

Приношу глубокую благодарность А. Н. Колмогорову за ряд ценных замечаний.

Ленинградский государственный университет  
им. А. А. Жданова

Поступило  
19 XI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> M. Rosenblatt, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 42, 43 (1956). <sup>2</sup> И. А. Ибрагимов, ДАН, 125, № 4 (1959). <sup>3</sup> И. А. Ибрагимов, Вестн. ЛГУ, № 1 (1960). <sup>4</sup> А. Н. Колмогоров, Ю. А. Розанов, Теор. вероятн. и ее применен., 5, в. 3 (1960). <sup>5</sup> А. М. Яглом, УМН, 4, в. 4 (1949).

Л. И. КАМЫНИН и В. Н. МАСЛЕННИКОВА

О РЕШЕНИИ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ЦЕЛОМ  
ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 12 XI 1960)

В настоящей работе изучается первая краевая задача для квазилинейного параболического уравнения вида

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t, u, \nabla u), \quad (1)$$

где  $\nabla u = (\partial u / \partial x_1, \partial u / \partial x_2, \dots, \partial u / \partial x_n)$  в нецилиндрических областях  $D$ . Решением аналогичной задачи (при  $b_i(x, t, u) \equiv b_i(x, t)$ ) занимался А. Фридман, установивший в статье <sup>(1)</sup> априорную  $(1-\delta)$ -оценку решения  $I$  краевой задачи для линейного параболического уравнения. Однако при ограничениях, наложенных А. Фридманом на  $f(x, t, u, w)$ , существование решения доказано в малом (по  $T$ ). Мы рассмотрим вопрос о существовании и единственности решения  $I$  краевой задачи для уравнения (1) в целом, т. е. при произвольном  $T$ .

Пусть  $D$  есть  $(n+1)$ -мерная область пространства  $(x_1, x_2, \dots, x_n; t) = (x, t)$ , ограниченная двумя гиперплоскостями  $t=0$  и  $t=T > 0$  и замкнутой поверхностью  $S$ , лежащей между этими гиперплоскостями. Пусть  $\Omega$  — основание  $D$ , т. е.  $\Omega = \bar{D} \cap \{t=0\}$ . Назовем нормальной границей области множество  $\Gamma = S \cup \Omega$ . Согласно А. Фридману <sup>(1)</sup> введем следующие нормы:

$$|v|_0^D = \sup_{(x, t) \in D} |v(x, t)|, \quad |v|_\alpha^D = |v|_0^D + H_\alpha^D[v],$$

$$H_\alpha^D[v] = \sup_{P_1, P_2 \in D} \frac{|v(P_1) - v(P_2)|}{[d(P_1, P_2)]^\alpha},$$

где расстояние между двумя точками  $P_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n; \bar{t})$  и  $P_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n; \bar{t})$  определено с помощью

$$d(P_1, P_2) = \left( \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i - \bar{x}_i)^2 + |\bar{t} - \bar{t}| \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Далее,

$$|v|_{1+\alpha}^D = |v|_\alpha^D + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|_\alpha^D,$$

$$|v|_{2+\alpha}^D = |v|_{1+\alpha}^D + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|_{1+\alpha}^D + \left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|_\alpha^D.$$

I. Относительно боковой поверхности  $S$  предполагается, что она может быть покрыта конечным числом сфер  $W_j$ , причем в каждой сфере  $W_j$  по-

падающий в нее кусок поверхности  $S_j$  допускает для некоторого  $i$  представление вида

$$x_i = h(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n; t), \\ (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, t) \in \Sigma_j,$$

где функция  $h$  имеет на  $\Sigma_j$  производные по  $x_k$  до 2-го порядка включительно, удовлетворяющие условию Гельдера (с показателем  $\alpha$ ;  $0 < \alpha < 1$ ) и первую производную по  $t$ , также удовлетворяющую условию Гельдера (с показателем  $\alpha$ ), причем расстояние между точками  $P_1(\bar{x}, \bar{t})$  и  $P_2(\bar{x}, \bar{t})$  в условии Гельдера берется из (2). Кроме того предполагается, что  $\partial h / \partial x_k$  на  $\Sigma_j$  удовлетворяет условию Липшица с обычным расстоянием

$$\rho(P_1, P_2) = \left( \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i - \bar{x}_i)^2 + (\bar{t} - \bar{t})^2 \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Пусть квазилинейный оператор  $L$  в (1) параболичен при  $(x, t) \in \bar{D}$ , т. е. для всех действительных векторов  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \lambda_i \lambda_j \geq a_0 \sum_{i=1}^n \lambda_i^2. \quad (4)$$

Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (1) удовлетворяют условиям:

II. Для всех  $(x, t) \in \bar{D}$ ,  $|u| < \infty$ ,  $\partial f(x, t, u, 0) / \partial u \geq b_0$  ( $b_0$  — постоянная).

III. В области  $(x, t) \in \bar{D}$ ,  $|\omega| < \infty$  ( $|\omega|^2 = \sum_{i=1}^n \omega_i^2$ ) и  $|u| \leq K \equiv \left( \sup_{\Gamma} |\psi| + \frac{\sup |f(x, t, 0, 0)|}{b_0 + \gamma} \right) e^{\gamma T}$  ( $\gamma > 0$  — постоянная, для которой  $\gamma + b_0 > 0$ ) выполняются условия: функции  $a_{ij}(x, t)$ ,  $b_i(x, t, u)$ ,  $f(x, t, 0, 0)$ ,  $\partial f(x, t, u, 0) / \partial u$  и  $\partial f(x, t, u, \omega) / \partial \omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) удовлетворяют по  $(x, t)$  условию Гельдера (с показателем  $\alpha$ ;  $0 < \alpha < 1$ ), а по  $u$  и  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — условиям Гельдера (с показателем  $\beta$ ,  $0 < \beta \leq 1$ );

$$|a_{ij}(x, t) - a_{ij}(\bar{x}, \bar{t})| \leq A_1 [d(P_1, P_2)]^\alpha \quad (5)$$

(здесь и в дальнейшем  $P_1 = P_1(x, t)$ ;  $P_2 = P_2(\bar{x}, \bar{t})$  и  $d(P_1, P_2)$  взято из (2));

$$|b_i(x, t, u) - b_i(\bar{x}, \bar{t}, u)| \leq B_1 [d(P_1, P_2)]^\alpha + B_2 |u - \bar{u}|^\beta, \quad (6)$$

$$|f(x, t, 0, 0) - f(\bar{x}, \bar{t}, 0, 0)| \leq C_1 [d(P_1, P_2)]^\alpha,$$

$$\left| \frac{\partial f(x, t, u, 0)}{\partial u} - \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}, 0)}{\partial u} \right| \leq C_2 [d(P_1, P_2)]^\alpha + C_3 |u - \bar{u}|^\beta; \quad (7)$$

$$\left| \frac{\partial f(x, t, u, \omega)}{\partial \omega_i} \right| \leq C_4 \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$\left| \frac{\partial f(x, t, u, \omega)}{\partial \omega_i} - \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}, \bar{\omega})}{\partial \omega_i} \right| \leq D_1 [d(P_1, P_2)]^\alpha +$$

$$+ D_2 |u - \bar{u}|^\beta + D_3 \left[ \sum_{i=1}^n (\omega_i - \bar{\omega}_i)^2 \right]^{\beta/2} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

IV. Функции  $a_{ij}(x, t)$  на  $\Sigma_j$  удовлетворяют по  $(x, t)$  условию Липшица с обычным расстоянием (3).

V. Пусть в области  $\bar{D}$  существует функция  $\Psi(x, t)$ , совпадающая на нормальной границе  $\Gamma$  области  $D$  с заданной граничной функцией  $\psi(x, t)$  и такая, что  $|\Psi|_{2+\alpha}^D < \infty$ .

Теорема 1. Если боковая поверхность  $S$ , коэффициенты квазилинейного параболического уравнения (1) и граничная функция  $\psi(x, t)$  удовлетворяют всем указанным выше условиям (4), I—V, то существует непрерывное в  $\bar{D}$  решение  $u(x, t)$  уравнения (1) с заданными граничными условиями

$$u|_{\Gamma} = \psi(x, t), \quad (9)$$

причем найдутся постоянные  $M$  и  $\lambda$  ( $0 < \lambda \leq \alpha\beta < 1$ ) такие, что в  $\bar{D}$  имеет место неравенство

$$|u|_{2+\lambda}^D \leq M(|f(x, t, 0, 0)|_{\alpha} + |\Psi|_{2+\alpha}), \quad (10)$$

где  $M$  зависит от области  $D$ , поверхности  $S$  и постоянных  $\alpha, \beta, \lambda, K, \alpha_0, A_1, B_1, B_2, C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_2, D_3$ .

Доказательство теоремы 1 использует априорную оценку модуля решения задачи (1), (9), теорему А. Фридмана о  $(1 + \delta)$ -оценке решения I краевой задачи для линейного параболического уравнения (1), теорему А. Фридмана о существовании и  $(2 + \alpha)$ -оценке решения I краевой задачи для линейного параболического уравнения (2) и теорему Шаудера о неподвижной точке.

Теорема 2 (А. Фридман (1)). Пусть  $S$  — любая замкнутая поверхность и квазилинейный оператор  $L$  параболичесен в  $\bar{D}$ . Если  $b_i(x, t, u)$  и  $f(x, t, u, w)$  локально непрерывны в смысле Липшица по  $u$ , т. е. при  $|u| \leq N$

$$\begin{aligned} |b_i(x, t, u_1) - b_i(x, t, u_2)| &\leq B_2(N) |u_1 - u_2|, \\ |f(x, t, u_1, w) - f(x, t, u_2, w)| &\leq C_2(N) |u_1 - u_2|, \end{aligned}$$

то в  $D$  может существовать не более одного решения I краевой задачи (1), (9), непрерывного в  $D$ .

Замечание. Из теоремы 2 вытекает при  $\beta = 1$  единственность решения I краевой задачи (1), (9), существование которого доказано в теореме 1.

Отметим одно обобщение теоремы 2 единственности для более общего квазилинейного параболического уравнения.

Теорема 3. Пусть  $S$  — любая замкнутая поверхность и квазилинейный оператор

$$\Delta u \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t, u, \nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial t}$$

параболичесен в  $\bar{D}$ , т. е. при  $(x, t) \in \bar{D}$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t, u, w) \lambda_i \lambda_j \geq a(u, w) \sum_{i=1}^n \lambda_i^2, \quad (11)$$

где  $a(u, w) > 0$  — невозрастающая функция  $(|u| + |w|)$  при  $(|u| + |w|) < \infty$ .

Если  $a_{ij}(x, t, u, w)$  и  $f(x, t, u, w)$  локально непрерывны в смысле Липшица по  $u$ , то может существовать не более одного решения I краевой задачи для уравнения

$$\Delta u \equiv f(x, t, u, \nabla u) \quad (12)$$

с краевым условием (9), непрерывного в  $\bar{D}$  и имеющего в  $\bar{D}$  ограниченные производные  $\partial u / \partial x_i, \partial^2 u / \partial x_i \partial x_j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ).

С помощью леммы 1 доказывается теорема 4.

Лемма 1. Если для непрерывной по всем аргументам функции  $f(x, t, u, w)$  при  $|u| < \infty$  выполняется неравенство

$$|f(x, t, u, 0)| \leq C_5 + C_6 |u|, \quad (13)$$

то для любого непрерывного в  $\bar{D}$  решения задачи (12), (9) (где  $\Lambda$  из (12) с непрерывными коэффициентами  $a_{ij}(x, t, u, \nabla u)$  удовлетворяет (11)) имеет место априорная оценка

$$\sup_{\bar{D}} |u(x, t)| \leq K_1 \equiv \left( \sup_{\Gamma} |\psi| + \frac{C_5}{\gamma - C_6} \right) e^{\gamma T} \quad (14)$$

( $\gamma > 0$  — любая постоянная, для которой  $\gamma - C_6 > 0$ ).

Теорема 4. Пусть боковая поверхность  $S$  удовлетворяет условию I; граничная функция  $\psi(x, t)$  удовлетворяет условию V,  $a_{ij}(x, t)$  непрерывны по Гельдеру (5), удовлетворяют на  $\bar{D}$  условию параболичности (4), а также условию IV. Пусть для всех  $|u| < \infty$  выполнено (13), а в области  $(x, t) \in \bar{D}$ ,  $|w| < \infty$ ,  $|u| \leq K_1$  (где постоянная  $K_1$  взята из (14) функции  $b_i(x, t, u)$ ,  $f(x, t, u, 0)$ ,  $\partial f(x, t, u, w)/\partial w_i$  непрерывны по Гельдеру, т. е. выполнено (6), (8) и

$$|f(x, t, u, 0) - f(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}, 0)| \leq C_7 [d(P_1, P_2)]^\alpha + C_8 |u - \bar{u}|^\beta,$$

а для  $\partial f(x, t, u, w)/\partial w_i$  имеет место неравенство (7). Тогда существует непрерывное в  $\bar{D}$  решение  $u(x, t)$  I краевой задачи (1), (9), для которого справедливо (10), где  $M$  зависит от области  $D$ , поверхности  $S$  и от  $\alpha, \beta, \lambda, A_1, B_1, B_2, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, D_1, D_2, D_3$ .

Замечание. В работе (1) А. Фридмана для уравнения (1) ( $b_i(x, t, u) \equiv b_i(x, t)$ ) доказано: 1) если не требовать существования  $\partial f/\partial w_i$ , но наложить условие

$$|f(x, t, u, w)| \leq C_5 + C_6 |u| + C_9 |w|^\delta, \quad (15)$$

где  $0 \leq \delta < 1$ , то решение задачи (1), (9) существует в целом; 2) если в (15)  $\delta = 1$  и не требовать существования  $\partial f/\partial w_i$ , то решение задачи (1), (9) существует при малых  $C_9$ ; 3) если  $f(x, t, u, w)$  локально непрерывна по Гельдеру, то решение задачи (1), (9) существует в малом (по  $T$ ).

Примечание при корректуре. Существование решения задачи (1), (9) авторами доказано для боковой поверхности  $S$ , допускающей барьер в каждой точке, и при непрерывной на  $\Gamma$  граничной функции  $\psi$ .

Математический институт им. В. А. Стеклова  
Академии наук СССР

Поступило  
11 XI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> A. Friedman, J. Math. and Mech., 9, № 4, 539 (1960). <sup>2</sup> A. Friedman, J. Math. and Mech., 7, № 5, 771 (1958).

М. Б. КАПИЛЕВИЧ

# О СИНГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧАХ ТРИКОМИ В ОКРЕСТНОСТИ КОНЕЧНОЙ И БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННОЙ ОСОБОЙ ЛИНИИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 22 XI 1960)

Рассмотрим в области  $G$  ( $0 \leq x \leq y \leq x_0$ ) полуплоскости  $y \geq x$  уравнение

$$E(u, \beta, \beta') = (y - x) u_{xy} + \beta' u_x - \beta u_y = 0 \quad (1)$$

и назовем  $u(x, y, \beta, \beta')$ ,  $\bar{u}(x, y, \beta, \beta')$  решениями первой и второй сингулярных проблем Трикоми, если, соответственно:

$$u(x, x) = \tau(x), \quad u(0, y) = \tau(0) = 0; \quad \bar{u}_\eta(x, x) = \nu(x), \quad \bar{u}(0, y) = 0. \quad (2)$$

Положим, что  $\tau(x)$  и  $\nu(x)$  дважды непрерывно дифференцируемые функции на отрезке  $(0, x_0)$ ,  $\eta = -[(y - x)/(2 - \alpha - \alpha')]^{1-\alpha}$ ,  $\alpha = \beta + \beta' < 1$ ,  $\alpha = 2\beta$ ,  $\alpha' = 2\beta'$ . Введем в (1) переменные  $x = x$ ,  $s = y - x$  и, обозначая новую искомую функцию через  $u(x, s)$ , сведем (1), (2) к граничным задачам

$$F(u, \beta', \alpha) = s(u_{xs} - u_{ss}) + \beta' u_x - \alpha u_s = 0; \quad (3)$$

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad u(0, s) = \tau(0) = 0; \quad \bar{u}_\eta(x, 0) = \nu(x), \quad \bar{u}(0, s) = 0. \quad (4)$$

Для них имеет место следующий принцип Дюамеля: если  $U(x, s)$  и  $\bar{U}(x, s)$  — интегралы уравнения (3) с краевыми данными  $U(x, 0) = \bar{U}_\tau(x, 0) = 1$ ,  $U(0, s) = \bar{U}(0, s) = 0$ , то

$$u(x, s) = D_x \int_0^x U(x - \xi, s) \tau(\xi) d\xi = \int_0^x U(x - \xi, s) d\tau(\xi); \quad (5a)$$

$$\bar{u}(x, s) = D_x \int_0^x \bar{U}(x - \xi, s) \nu(\xi) d\xi = \int_0^x \bar{U}(x - \xi, s) d\nu(\xi). \quad (5b)$$

Разрывные ядра Дюамеля  $U(x, s)$ ,  $\bar{U}(x, s)$  сводятся к модифицированным неполным бета-функциям Эйлера  $I_z(p, q) = B_z(p, q) / B_1(p, q)$ , где  $B_z(p, q) = p^{-1} z^p F(1 - q, p, p + 1; z)$ , и имеют вид  $U = I_t(\beta', 1 - \alpha) = 1 - I_{1-t}(1 - \alpha, \beta')$ ,  $\omega^{-1} \bar{U} = I_t(1 - \beta, \alpha - 1) = 1 - I_{1-t}(\alpha - 1, 1 - \beta)$ ,  $t = x/y$ ,  $\omega = -[2(1 - \alpha)/s]^{\alpha-1} = 1/\eta$ .

В случае бесконечно дифференцируемых  $\tau(x)$  и  $\nu(x)$  интегралы (5a) и (5b), сходящиеся только при  $\beta' > -1$  и  $\beta < 2$ , могут быть заменены

разложениями  $u = V(x, s, D_x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (-s)^n B_t(\beta', n, 1 - \alpha - n) D_x^n \tau(x) =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} D_n \left(\frac{x}{s}\right)^{n+\beta'} \gamma^*(\beta' + n, x D_x) \tau(x)$ ,  $A_n n! \Gamma(\beta') \Gamma(1 - \alpha) = \Gamma(1 - \beta)$ ,  $D_n \Gamma(1 - \beta) = (-1)^n A_n \Gamma(\beta' + n) \Gamma(1 - n - \beta)$ , которые в символической записи имеют вид

$$u = \frac{A_0}{\beta'} \left(\frac{x}{s}\right)^{\beta'} \Phi_1\left(\beta', 1 - \beta, 1 + \beta', -\frac{x}{s}, -x D_x\right) \tau(x). \quad (6)$$

Путем аналитического продолжения функции  $\Phi_1$  приходим к аналогичным рядам и вне той области  $y > 2x$ , где сходится (6). Заменив в (6)  $\beta, \beta', \tau(x)$  на  $1-\beta', 1-\beta, \nu(x)$ , найдем после умножения на  $\omega$  соответствующие разложения для  $\bar{u}$ . Представление решений  $u, \bar{u}$  в формах (5), (6) сводит рассмотрения к изучавшимся в проблемах математической статистики, протабулированным функциям  $I_z(p, q)$  (1). Через эти функции выражаются резольвенты Дюамеля и в случае уравнения (2):

$$(y-x)u_{xy} + \beta(u_x - u_y) - b^2(y-x)u = 0. \quad (7)$$

Действительно для построения  $U(x, s)$  выполним в (7) подстановку  $s = y - x, t = x/y, u = s^{-\beta}v$ , после чего в возникающем при этом уравнении  $s(1-t^2)v_{st} - t(1-t)^2v_{tt} - s^2v_{ss} - (1-t)^2v_t + [\beta(\beta-1) - b^2s^2]v = 0$  положим  $v = \sum_{n=0}^{\infty} s^{\beta+n}f_n(t)$ . Тогда получим рекуррентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$t(1-t)^2 f_{m+2}'(t) - (1-t)[m + \beta + 1 + (m + \beta + 3)t]f_{m+2}'(t) + (m+2)(m+2\beta+1)f_{m+2}(t) + b^2f_m(t) = 0, \quad (8)$$

где  $m = -2, -1, 0, 1, 2, \dots, f_{-2}(t) = f_{-1}(t) \equiv 0$ .

Кроме того, чтобы обеспечить выполнение краевых условий, определяющих  $U(x, s)$ , будем считать  $f_0(0) = 0, f_0(1) = 1, f_n(0) = 0, \lim_{y \rightarrow x} [s^n f_n(t)] = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Отсюда прежде всего находим  $f_0(t) = I_t(\beta, 1-a)$ , т. е. первый член разложения  $U = \sum_{n=0}^{\infty} s^n f_n(t)$  совпадает с резольвентой Дюамеля для  $E(u, \beta, \beta) = 0$ .

Анализируя далее особенности решений  $f_{2n+1}(t)$  в окрестности точек  $t = 0$  и  $t = 1$ , приходим к выводу, что  $f_{2n+1}(t) \equiv 0$  при всех  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Продифференцируем, наконец, (8) по  $t$ ; тогда, полагая  $f_{2n}'(t) = \Phi_{2n}'(t)$ , получим  $t(1-t)^2 \Phi_{2n}'' - (1-t)[2n + \beta - 2 + (2n + \beta + 4)t] \Phi_{2n}' + 2[n(2n + 2\beta - 1) - 1 + (2n + \beta + 1)t] \Phi_{2n} + b^2 \Phi_{2n-2} = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Так как  $\Phi_0(t) = c_0(\beta) t^{\beta-1} (1-t)^{-a}$ , то из этих неоднородных дифференциальных уравнений вычисляем последовательно  $\Phi_{2n}(t) = c_n(\beta) b^{2n} t^{n+\beta-1} (1-t)^{-2n-a}$ ,  $c_n(\beta) n! \Gamma(1-a) \Gamma(n+\beta) = \Gamma(1-\beta)$ , а затем находим  $f_{2n}(t) = c_n(\beta) b^{2n} \times$

$\times B_t(n+\beta, 1-2n-a)$ . Таким образом,  $U = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\beta) (bs)^{2n} B_t(n+\beta, 1-2n-a)$ , и аналогично  $\bar{U} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_n (bs)^{2n} B_t(1+n-\beta, a-2n-1)$ , где  $\bar{c}_n = \omega c_n(1-\beta)$ .

Эти выражения для  $U$  и  $\bar{U}$  после предварительно выполненной квадратичной трансформации над  $B_t$  сводятся к конфлюэнтным функциям Kampé de Fériet'a второго порядка нулевого класса типа 7 (см. (3), стр. 152). Таким же путем находятся в случае (7) и разложения вида (6). А именно, для получения символического оператора (6) достаточно построить резольвенту Дюамеля  $V(x, s, \lambda)$  первой сингулярной проблемы Трикоми для того уравнения, которому удовлетворяет функция  $v = \exp(-\lambda x)u$  ( $\lambda = D_x = \text{const}$ ). Подобные вычисления, проведенные здесь на примере (7), выполняются и для более общего уравнения Чаплыгина, играющего важную роль в приложениях. Предельное значение  $\lim_{s \rightarrow \infty} [s^{\beta'} u] = \Gamma(1-\beta)/\Gamma(1-\alpha) D_x^{-\beta'} \tau(x) = T(x)$ , найденное из (5), показывает, что  $u(x, s)$  является интегралом уравнения (3), правильным в окрестности особой линии  $s = \infty$  с показателем, равным  $\beta'$ . Поэтому для изучения функции  $u(x, s)$  при  $s \rightarrow \infty$  удобно ввести переменные  $\sigma = 1/s, w = s^{\beta'} u$ , сведя тем самым (3), (4) к задаче

$$\omega_{x\sigma} + \sigma^2 \omega_{\sigma\sigma} + (\beta' - \beta + 2) \sigma \omega_{\sigma} + \beta' (1-\beta) \omega = 0, \quad (9)$$

$$\omega(x, 0) = T(x), \quad \omega(0, \sigma) = 0, \quad T(0) = 0 \quad (10)$$

Полагая в (5а)  $\tau(x) = \Gamma(1-\alpha)/\Gamma(1-\beta) D_x^{\beta'-1} T'(x)$ , получим

$$w(x, \sigma, \beta, \beta') = D_x \int_0^x U(x-\xi, \sigma) T(\xi) d\xi = \int_0^x U_1(x-\xi, \sigma) dT(\xi), \quad (11)$$

где  $U(x, \sigma) = F(\beta', 1-\beta, 1, -x\sigma)$ . Наоборот, (5а) возникает, если перейти в (11) от  $T(x)$  к  $\tau(x)$ . Умножим (9) на  $2w_\sigma$ , а затем проинтегрируем результат по прямоугольнику  $D = OAMBO$  с вершинами  $O(0, 0)$ ,  $A(x_1, 0)$ ,  $B(0, \sigma_1)$ ,  $M(x_1, \sigma_1)$ . Тогда, считая  $w = 0$  на  $OA$  и  $OB$ , придем к тождеству

$$\int_{BM} [\sigma^2 w_\sigma^2 + \beta'(1-\beta)w^2] dx + \int_{AM} w_\sigma^2 d\sigma + 2(\beta' - \beta + 1) \iint_D \sigma w_\sigma^2 dx d\sigma = 0,$$

из которого при  $\beta' > 0$ ,  $\beta < 1$  следует  $z \equiv 0$  в  $\bar{D}$ . Формулы связи дают возможность распространить эту теорему единственности и на значения  $\beta' < 0$ ,  $\beta > 1$ .

**Теорема 1.** При  $\beta'_1 > \beta'_2 > 0$ ,  $\beta' = \beta'_1 - \beta'_2$ ,  $\mu_1 \Gamma(\beta'_2) \Gamma(\beta') = \Gamma(\beta'_1)$  решения  $w_k = w(x, \sigma, \beta, \beta'_k)$  ( $k = 1, 2$ ) связаны равенством

$$w(x, \sigma, \beta, \beta'_2) = \mu_1 \int_0^1 \xi^{\beta'_2-1} (1-\xi)^{\beta'-1} w(x, \xi\sigma, \beta, \beta'_1) d\xi, \quad (12)$$

которому в случае  $T(x) \subset C_{n+1}$  ( $0 \leq x \leq x_0$ ) отвечает разложение

$$w(x, \sigma, \beta, \beta'_2) = \sum_{k=0}^n \frac{(\beta')_k}{(\beta_1)_k} k! (-\sigma)^k D_\sigma^k w(x, \sigma, \beta, \beta'_1) + R_n, \quad (13)$$

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1} \Gamma(\beta'_1)}{\Gamma(\beta') \Gamma(\beta'_2 + n + 1)} \times$$

$$\times \int_0^1 \xi^{\beta'_2+n} F(1-\beta', \beta'_2, \beta'_2 + n + 1, \xi) D_\xi^{n+1} w(x, \xi\sigma, \beta, \beta'_1) d\xi.$$

**Теорема 2.** Для  $0 \leq \beta_1 < \beta_2 < 1$ ,  $\beta = \beta_2 - \beta_1$ ,  $\mu_2 \Gamma(1-\beta_2) \Gamma(\beta) = \Gamma(1-\beta_1)$  имеет место соотношение

$$w(x, \sigma, \beta_2, \beta') = \mu_2 \int_0^1 \xi^{-\beta_2} (1-\xi)^{\beta-1} w(x, \xi\sigma, \beta_1, \beta') d\xi. \quad (14)$$

Если  $T(x)$  бесконечно дифференцируема на отрезке  $(0, x_0)$ , причем  $|T^{(n)}(x)| \leq M$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), то (14) порождает в пределе разложение

$$w(x, \sigma, \beta, \beta'_2) = {}_1F_1(\beta', \beta'_1, -\delta_\sigma) w(x, \sigma, \beta, \beta'_1) \quad (\delta_\sigma = \sigma D_\sigma), \quad (15)$$

сводящееся при  $\beta' = -m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) к конечным рекуррентным соотношениям  $(\beta')_m w(\beta, \beta' + m) = m! L_m^{\beta'-1}(-\delta_\sigma) w(\beta, \beta') = \sigma^{1-\beta'} D_\sigma^m [\sigma^{\beta'+m-1} \times w(\beta, \beta')]$ . Из (15) следует также  $w(\beta, 1) = \Gamma(\beta') \gamma^*(\beta' - 1, \delta_\sigma) w(\beta, \beta')$  для произвольных  $\beta' \neq 0, -1, -2, \dots$ . Аналогичные разложения возникают и из (14). Например, для смежных функций  $w(\beta - m, \beta')$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) находим таким путем  $(1-\beta)_m w(\beta - m, \beta') = \sigma^\beta D_\sigma^m [\sigma^{m-\beta} w(\beta, \beta')]$ . Решая интегральные уравнения (12), (14), получим обратные операторы преобразования  $T_\sigma^{-1}$ :  $\Gamma(\beta'_1) w(\beta, \beta'_1) = \Gamma(\beta'_2) \sigma^{1-\beta_2} D_\sigma D_\sigma^{\beta'-1} [\sigma^{\beta'_1-1} w(\beta, \beta'_2)]$  ( $\beta'_1 > 0$ ,  $\beta' < 1$ ),  $\Gamma(1-\beta_1) w(\beta_1, \beta') = \Gamma(1-\beta_2) \sigma^{\beta_2} D_\sigma D_\sigma^{\beta-1} [\sigma^{-\beta_1} w(\beta_2, \beta')]$  ( $0 < \beta < 1$ ). Интересно сравнить также (9) с его конфлюэнтным случаем  $z_{x\sigma} + a\sigma z_\sigma + a\beta' z = 0$  ( $a > 0$ ), возникающим из (9), если после замены  $x, \beta$  на  $\varepsilon x, -a/\varepsilon$  положить там  $\varepsilon = 0$  и, в частности, сопоставить (9) с телеграфным уравнением  $v_{x\sigma} + c^2 v = 0$ , аппроксимирующим (9) при  $c^2 = \beta'(1-\beta)$  в окрестности линии  $\sigma = 0$ .

Теорема 3. При  $\beta < 1$ ,  $\beta' > 0$ ,  $c > 0$ ,  $\mu \Gamma(\beta') \Gamma(1 - \beta) = 2c^{1+\beta'-\beta}$  решения  $w(x, \sigma, \beta, \beta')$ ,  $z(x, \sigma, \beta')$ ,  $v(x, \sigma, c)$  задачи (10) преобразуются друг в друга соотношениями

$$w(x, \sigma, \beta, \beta') = \frac{a^{1-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^\infty \xi^{-\beta} e^{-a\xi z} (x, \xi \sigma, \beta') d\xi,$$

$$w(x, \sigma, \beta, \beta') = \mu \int_0^\infty \xi^{(\beta'-\beta-1)/2} K_{\alpha-1}(2c\sqrt{\xi}) v(x, \xi \sigma, c) d\xi.$$

Обратить эти равенства дают возможность известные формулы обращения преобразований Лапласа и Ханкеля.

Для интегралов  $w, z, v$  удастся эффективно построить и операторы преобразования  $T_x$ , например  $w(\beta, \beta'_2) = D_x \int_0^x Q_1(\xi) u(\xi, \sigma, \beta'_1) d\xi =$   
 $= D_x \int_0^x Q_2(\xi) v(\xi, \sigma, c) d\xi$ , если  $T_2(x) = P(x) T_1(x)$ , а  $Q_1$  и  $Q_2$  определены выражениями

$$Q_1 = -e^{a\xi\sigma} D_\xi e^{-a\xi\sigma} \times$$

$$\times \int_\xi^x P(t) {}_1F_1[1 - \beta'_1, 1, -a\sigma(t - \xi)] F[\beta'_2, 1 - \beta, 1, -\sigma(x - t)] dt,$$

$$Q_2 = -D_\xi \int_\xi^x P(t) I_0[2c\sqrt{\sigma(t - \xi)}] F[\beta'_2, 1 - \beta, 1, -\sigma(x - t)] dt.$$

Этим равенствам отвечают разложения  $w(\beta, \beta'_2) = {}_2F_0[\beta'_2, 1 - \beta, -\sigma D_x^{-1}] [P(x) T_1(x)]$ , где  $T_1(x) = \exp(-ax\sigma)(1 - a\sigma D_x^{-1})^{-\beta_1} [\exp(ax\sigma) \times u(x, \sigma, \beta_1)] = \exp(c^2\sigma D_x^{-1}) v(x, \sigma, c)$ , причем расходящиеся ряды  ${}_2F_0(a, b, -z^{-1}) = z^a \Psi(a, a - b + 1, z)$  в целочисленных случаях вырождаются в известные полиномы Бесселя (4). Произведения операторов  $T_x$  и  $T_\sigma$  дают ряд итерированных связей; так, при  $\beta' = \beta'_1 - \beta'_2$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\beta'_2 > 0$ ,  $\beta'_1 > \beta'_2 + \lambda$ ,  $\mu \Gamma(\beta'_2) \Gamma(\lambda) \Gamma(\beta' - \lambda) = \Gamma(\beta'_1)$  находим

$$w(\beta, \beta'_2) = \mu \int_0^1 \int_0^1 t^{\beta'-1} (1-t)^{\beta'-\lambda-1} (1-\xi)^{\lambda-1} \times$$

$$\times F(\beta'_1 - \lambda - 1, -\lambda, \beta' - \lambda, 1 - t) w(x, \xi \sigma t, \beta, \beta'_1) d\xi dt.$$

С помощью формул связи устанавливается большое число соотношений (интегральных и в виде бесконечных рядов) для гипергеометрических функций Appell'a, Horn'a, Humbert'a, Kampé de Fériet'a первого и более высоких порядков с двумя независимыми переменными, а также функций Lauricella и их конфлюенций, к которым сводятся  $u, \bar{u}, w, \bar{w}, z, \bar{z}, v, \bar{v}$  при подходящем выборе значений  $\tau(x)$ ,  $\nu(x)$ ,  $T(x)$ ,  $P(x)$ .

Московский вечерний  
металлургический институт

Поступило  
19 XI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> K. Pearson, tables of the Incomplete Beta-function, Cambridge, 1904. <sup>2</sup> М. Б. Капилевич, ДАН, 91, № 4, 719 (1953). <sup>3</sup> P. Appell, J. Kampé de Fériet, Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, Polynômes d'Hermite, Paris, 1926. <sup>4</sup> W. A. Al-Salam, Duke Math. J., 24, № 4, 529 (1957).

В. Г. МАЗЬЯ

# НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 24 XI 1960)

В конечной области  $\Omega$   $n$ -мерного евклидова пространства  $R_n$  с границей  $\Gamma\Omega$  рассмотрим эллиптический оператор

$$\mathfrak{M} = \nabla [A(x) \nabla] + \mathbf{b}(x) \nabla + c(x),$$

где  $A(x)$  — матрица, первое собственное число которой не меньше, чем  $\kappa > 0$ . Мы будем предполагать для простоты, что коэффициенты  $A(x)$ ,  $\mathbf{b}(x)$ ,  $c(x)$  и функции из области задания оператора  $\mathfrak{M}$  — достаточно гладкие в  $\bar{\Omega}$  функции. Однако постоянные в сформулированных ниже оценках не зависят от модулей непрерывности коэффициентов. Условие достаточной гладкости не является существенным и может быть ослаблено.

В работе (1) Г. Стампаккья при условии, обеспечивающем единственность, получил для обобщенного решения в  $\overset{0}{W}_2^{(1)}(\Omega)$  уравнения  $\mathfrak{M}u = f$  оценку\*

$$\|u\|_{L_s(\Omega)} \leq K \|f\|_{L_r(\Omega)},$$

где  $1 < r \leq \frac{2n}{n+2}$ ,  $\frac{1}{s} > \frac{1}{r} - \frac{2}{n}$  и постоянная  $K$  не зависит от модулей непрерывности коэффициентов уравнения. Он высказал предположение, что указанная оценка справедлива также при  $\frac{1}{s} = \frac{1}{r} - \frac{2}{n}$ . Следующая теорема показывает, что предположение Г. Стампаккья справедливо при любом  $r \in (1, n/2)$ .

Теорема 1. Решение задачи

$$\mathfrak{M}u = f, \quad u|_{\Gamma\Omega} = 0 \tag{1}$$

удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{L_s(\Omega)} \leq K [\|f\|_{L_r(\Omega)} + \|u\|_{L(\Omega)}], \tag{2}$$

где: 1)  $\frac{1}{s} \geq \frac{1}{r} - \frac{2}{n}$  при  $\frac{n}{2} > r$ ; 2)  $s > 0$  — произвольное число при  $r = \frac{n}{2}$  и  $K = K(n, r, s, p_1, p_2, \kappa, \|\mathbf{b}(x)\|_{L_{p_1}(\Omega)}, \|c^+(x)\|_{L_{p_2}(\Omega)}, \text{mes}_n \Omega)$  ( $p_1 > n$ ,  $p_2 > \frac{n}{2}$ )\*\*.

Если функция  $f(x)$  суммируема со степенью  $r$  меньшей, чем  $\frac{2n}{n+2}$ , то оценить решение задачи (1) в пространстве  $W_2^1(\Omega)$  через норму  $f$  в  $L_{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$  в общем случае невозможно. В следующей теореме получена

\* Здесь и в дальнейшем через  $K$  обозначены различные постоянные.

\*\*  $f^+(x)$  и  $f^-(x)$  обозначают соответственно положительную и отрицательную части функции  $f(x)$ .

оценка градиента решения задачи (1) в норме  $L_q(\Omega)$ , где  $\frac{n}{n-1} < q < 2$ .

**Теорема 2.** Решение задачи (1) удовлетворяет неравенству

$$\|\nabla u\|_{L_s(\Omega)} \leq K [\|f\|_{L_r(\Omega)} + \|u\|_{L(\Omega)}], \quad (3)$$

где  $\frac{1}{s} \geq \frac{1}{r} - \frac{1}{n}$ ,  $1 < r < \frac{2n}{n+2}$  и  $K$  зависит от тех же постоянных, что и в теореме 1.

Пусть граница области  $\Omega$  — гладкая поверхность. Тогда аналогичные оценки имеют место для задачи

$$\Delta u = f, \quad \mathbf{n} \cdot A \cdot \nabla u + \beta u|_{\Gamma\Omega} = \varphi, \quad (4)$$

где  $\beta, \varphi$  — заданные на  $\Gamma\Omega$  функции,  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к  $\Gamma\Omega$ .

Неравенству (2) соответствует оценка

$$\|u\|_{L_s(\Omega)} \leq K [\|f\|_{L_r(\Omega)} + \|\varphi\|_{L_t(\Gamma\Omega)} + \|u\|_{L(\Omega)}], \quad (5)$$

где: 1)  $\frac{1}{s} \geq \frac{1}{r} - \frac{2}{n}$  при  $\frac{n}{2} > r > 1$ ; 2)  $s > 0$  — произвольное число при  $r = \frac{n}{2}$ ;  $t \geq \frac{r(n-1)}{n-r}$  и  $K = K(n, r, s, t, p_1, p_2, p_3, \kappa, \|b(x)\|_{L_{p_1}(\Omega)}, \|c^+(x)\|_{L_{p_2}(\Omega)},$

$\beta^-(x)\|_{L_{p_3}(\Gamma\Omega)}, \Omega) (p_1 > n, p_2 > \frac{n}{2}, p_3 > n-1)$ .

Для решения задачи (4) можно доказать также следующее неравенство, аналогичное неравенству (3):

$$\|\nabla u\|_{L_s(\Omega)} \leq K [\|f\|_{L_r(\Omega)} + \|\varphi\|_{L_t(\Gamma\Omega)} + \|u\|_{L(\Omega)}], \quad (6)$$

где  $\frac{1}{s} \geq \frac{1}{r} - \frac{1}{n}$ ,  $1 < r < \frac{2n}{n+2}$ ,  $t > \frac{r(n-1)}{n-r}$  и  $K = K(n, r, s, t, p_1, p_2, p_3, \kappa, \|b(x)\|_{L_{p_1}(\Omega)}, \|c^+(x)\|_{L_{p_2}(\Omega)}, \|\beta^-(x)\|_{L_{p_3}(\Gamma\Omega)}, \Omega) (p_1 > n, p_2 > \frac{n}{2}, p_3 > n-1)$ .

Требование гладкости границы области  $\Omega$  можно ослабить. Оценки (5), (6) останутся справедливыми, если предположить, что  $\Gamma\Omega$  — кусочно гладкая поверхность и что существует такая положительная постоянная  $\mathfrak{A}$ , зависящая только от области  $\Omega$ , что для любого замкнутого множества  $E \subset \overline{\Omega}$  ( $\text{mes}_n E \leq \frac{1}{2} \text{mes}_n \Omega$ ) с границей  $\Gamma E$  справедливо неравенство

$$\text{mes}_{n-1}(\Gamma\Omega \cap E) \leq \mathfrak{A} \text{mes}_{n-1}(\Omega \cap \Gamma E), \quad (7)$$

где через  $\text{mes}_{n-1}$  обозначена  $(n-1)$ -мерная мера Хаусдорфа.

Из изопериметрического неравенства следует, что область, удовлетворяющая условию (7), принадлежит классу  $J_{n-1}^{(n)}$ , определенному в заметке (3).

Без условия (7) оценки (5), (6) в общем случае неверны. Однако можно рассмотреть некоторые классы областей и получить оценки решений задачи (4) для этих областей, аналогичные оценкам (5), (6). Будем рассматривать области  $\Omega$ , удовлетворяющие следующему условию. Существует такая постоянная  $\mathfrak{B}$ , зависящая только от области  $\Omega$ , что для любого замкнутого множества  $E \subset \overline{\Omega}$  ( $\text{mes}_n E \leq \frac{1}{2} \text{mes}_n \Omega$ ) с границей  $\Gamma E$ , справедливо неравенство

$$\max \{ \text{mes}_n^\alpha E, \text{mes}_{n-1}^\beta(\Gamma\Omega \cap E) \} \leq \mathfrak{B} \text{mes}_{n-1}(\Omega \cap \Gamma E), \quad (8)$$

где  $1 > \alpha > \frac{n-1}{n}$ ,  $\beta > 1$ ,  $(2\alpha - 1)\beta < \alpha$ .

Пример. Для  $n$ -мерного конуса  $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 < x_n^{2\kappa}$  ( $1 < \kappa < 2$ ) условие (8) выполнено ( $\alpha = \frac{\kappa(n-1)}{\kappa(n-1)+1}$ ,  $\beta = \frac{\kappa(n-1)}{\kappa(n-2)+1}$ ).

Мы по-прежнему предполагаем, что граница области  $\Omega$  — кусочно-гладкая поверхность.

Теорема 3. Если область  $\Omega$  удовлетворяет условию (8), то решение задачи (4) удовлетворяет неравенству (5), где  $r > 1$ ,  $t\beta[1 - r(1 - \alpha)] >$

$> r\alpha$ ,  $\frac{1}{s} \geq \frac{1}{r} - 2(1 - \alpha)$  при  $2r(1 - \alpha) < 1$ . Если  $2r(1 - \alpha) = 1$ ,  $r > 1$ ,

то в неравенстве (5)  $s$  — произвольное положительное число. Кроме того,  $p_1(1 - \alpha) > 1$ ,  $2p_2(1 - \alpha) > 1$ ,  $p_3[\alpha - \beta(2\alpha - 1)] > \alpha$ .

Оценка (6) также останется справедливой, если показатели  $s, r, t, p_i$  изменить следующим образом:  $r > 1$ ,  $s \leq 2$ ,  $t\beta[1 - r(1 - \alpha)] > r\alpha$ ,

$\frac{1}{s} \geq \frac{1}{r} + \alpha - 1$ ,  $p_1(1 - \alpha) > 1$ ,  $2p_2(1 - \alpha) > 1$ ,  $p_3[\alpha - \beta(2\alpha - 1)] > \alpha$ .

В следующей теореме сформулирована оценка максимума модуля решения задачи (4) для областей указанного выше класса.

Теорема 4. Для решения задачи (4) справедлива оценка \*

$$|u| \leq K [\|f\|_{L_r(\Omega)} + \|\varphi\|_{L_t(\Gamma\Omega)} + \|u\|_{L(\Omega)}], \quad (9)$$

где  $2r(1 - \alpha) > 1$ ,  $t[\alpha - \beta(2\alpha - 1)] > \alpha$  и  $K = K(r, t, \alpha, \beta, p_i, \kappa, \|b(x)\|_{L_{p_1}(\Omega)}, \|c^+(x)\|_{L_{p_2}(\Omega)}, \|\beta^-(x)\|_{L_{p_3}(\Omega)}, \mathfrak{B}, \text{mes}_n \Omega, \text{mes}_{n-1} \Gamma\Omega)$  ( $p_1(1 - \alpha) > 1$ ,  $2p_2(1 - \alpha) > 1$ ,  $p_3[\alpha - \beta(2\alpha - 1)] > \alpha$ ).

Если выполнено условие (7), то в оценке (9)  $t > n - 1$ ,  $2r > n$ ,  $p_1 > n$ ,  $2p_2 > n$ ,  $p_3 > n - 1$ .

Заметим, что близкие результаты можно получить и для бесконечных областей.

Ленинградский государственный университет  
им. А. А. Жданова

Поступило  
2 XI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> G. Stampacchia, Ann. Scuola norm. sup. Pisa, S. 3, 12, 223 (1958). <sup>2</sup> А. Г. Сигалов, Тр. Моск. матем. общ., 2, 201 (1953). <sup>3</sup> В. Г. Мазья, ДАН, 133, № 3, 527 (1960).

\* Относительно оценок максимума модуля решения уравнения (1) см. статьи (1, 2).

В. А. ПЛИС

# О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ У НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 11 XI 1960)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax + F(x, t), \quad (1)$$

где  $x$  и  $F(x, t)$  — вещественные  $n$ -мерные векторы с компонентами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и  $F_1(x, t), \dots, F_n(x, t)$  соответственно;  $A = \{a_{ij}\}$  — вещественная постоянная квадратная матрица  $n$ -го порядка. Относительно функции  $F(x, t)$  предполагается, что она непрерывна, имеет период  $2\pi$  по переменной  $t$  и удовлетворяет условию единственности решений при всех  $x, t$ .

Целью настоящей заметки является установление достаточных условий существования  $2\pi$ -периодического решения системы (1). Аналогичной задачей занимался М. А. Красносельский<sup>(1,2)</sup>. Приводимые ниже условия существования  $2\pi$ -периодических решений отличаются от найденных М. А. Красносельским тем, что в этих условиях матрица  $A$  может иметь мнимые собственные числа.

Введем следующие обозначения. Пусть  $\xi$  —  $n$ -мерный вектор с компонентами  $\xi_1, \dots, \xi_n$ ;  $B = \{b_{ij}\}$  — квадратная матрица  $n$ -го порядка. Положим

$$\|\xi\| = \sum_{i=1}^n |\xi_i|, \quad \|B\| = \sum_{ij=1}^n |b_{ij}|.$$

**Теорема.** Если матрица  $A$  не имеет собственных чисел вида  $ki$  ( $k$  — натуральное число или нуль,  $i$  — мнимая единица) и если функция  $F(x, t)$  при достаточно больших  $\|x\|$  удовлетворяет неравенству

$$\|F(x, t)\| < L \|x\|, \quad (2)$$

где положительная постоянная  $L$  достаточно мала, то система (1) имеет хотя бы одно  $2\pi$ -периодическое решение.

**Доказательство.** Обозначим через  $x(t, x^0, t_0)$  решение системы (1) с начальными данными  $t_0, x^{(0)}$ . Из оценок (2) следует<sup>(3,4)</sup>, что все решения системы (1) продолжимы на все моменты времени от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Поставим в соответствие точке  $x^{(0)}$  точку  $x(2\pi, x^{(0)}, 0)$ . Таким образом получим топологическое преобразование  $T$  пространства  $\{x\}$  в себя. Наряду с этим преобразованием рассмотрим вектор преобразования  $v = T(x) - x$  с компонентами  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Ясно, что неподвижные точки этого преобразования или, что то же самое, особые точки поля  $v$  являются начальными данными  $2\pi$ -периодических решений, и наоборот.

Рассмотрим теперь линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \quad (3)$$

Не нарушая общности, мы можем считать, что матрица  $A$  имеет каноническую структуру. Определим для системы (3) преобразование  $T_0$  пространства  $\{x\}$  в себя, аналогичное преобразованию  $T$  для системы (1).

Обозначим через  $w = \{w_1, \dots, w_n\}$  вектор преобразования  $T_0$ , т. е.  $v = T_0(x) - x$ . Пусть матрица  $A$  имеет следующие характеристические числа:  $\lambda_1 \pm i\mu_1, \lambda_2 \pm i\mu_2, \dots, \lambda_s \pm i\mu_s, \kappa_1, \dots, \kappa_{n-2s}$ , среди которых могут быть и равные. Ясно, что

$$\frac{D(w_1, \dots, w_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} e^{2\pi\lambda_1} \cos 2\pi\mu_1 - 1 & -e^{2\pi\lambda_1} \sin 2\pi\mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ e^{2\pi\lambda_1} \sin 2\pi\mu_1 & e^{2\pi\lambda_1} \cos 2\pi\mu_1 - 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & e^{2\pi\kappa_{n-2s}} - 1 \end{vmatrix}.$$

и по теореме Лапласа имеем

$$\frac{D(w_1, \dots, w_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \prod_{m=1}^s (1 - 2e^{2\pi\lambda_m} \cos 2\pi\mu_m + e^{4\pi\lambda_m}) \prod_{m=1}^{n-2s} (e^{2\pi\kappa_m} - 1).$$

В силу условия теоремы о том, что в случае  $\lambda_m = 0, \mu_m \neq k$  ( $k$  — натуральное число или нуль), имеем

$$\frac{D(w_1, \dots, w_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0.$$

Это доказывает (см., например, (5)), что индекс точки  $x_1 = \dots = x_n = 0$  как особой точки поля  $w(x)$  равен  $\pm 1$ . Кроме того, из неравенства  $D(w_1, \dots, w_n) / D(x_1, \dots, x_n) \neq 0$  вытекает, что существует такая постоянная  $K > 0$ , что

$$\|w(x)\| \geq K \|x\|. \quad (4)$$

Оценим теперь разность  $\|v(x^{(0)}) - w(x^{(0)})\|$  при достаточно больших значениях  $\|x^{(0)}\|$ . Ясно, что

$$v(x^{(0)}) - w(x^{(0)}) = x(2\pi, x^{(0)}, 0) - y(2\pi, x^{(0)}, 0), \quad (5)$$

где через  $y(t, x^{(0)}, t_0)$  обозначается решение системы (3) с начальными данными  $t_0, x^{(0)}$ . Пусть  $Y(t)$  — решение матричного уравнения

$$dY/dt = AY \quad (6)$$

такое, что  $Y(0) = I$ .

Известно (см., например, (6)), что тогда решение  $x(t, x^{(0)}, 0)$  системы (1) удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t, x^{(0)}, 0) = y(t, x^{(0)}, 0) + \int_0^t Y(t-\tau) F(x, \tau) d\tau. \quad (7)$$

Положим  $c_1 = \sup_{0 \leq t \leq 2\pi} \|y(t, x^{(0)}, 0)\|$ ; так как  $y(t, x^{(0)}, 0)$  — решение линейной системы (3), то существует такая положительная постоянная  $M$ , что  $c_1 \leq M \|x^{(0)}\|$ . Пусть кроме того,  $c_2 = \sup_{0 \leq t \leq 2\pi} \|Y(t)\|$ . Тогда из равенства (7) получим

$$\|x(t, x^{(0)}, 0)\| \leq c_1 + c_2 \int_0^t \|F(x(\tau, x^{(0)}, 0), \tau)\| d\tau \quad \text{при } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Считая, что  $\|x^{(0)}\|$  достаточно велико, из условия (2) получаем

$$\|x(t, x^{(0)}, 0)\| \leq c_1 + c_2 L \int_0^t \|x(\tau, x^{(0)}, 0)\| d\tau \quad \text{при } 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (8)$$

Отсюда по известной лемме (см., например <sup>(6,7)</sup>), находим

$$\|x(t, x^{(0)}, 0)\| \leq c_1 e^{c_2 L t} \quad (0 \leq t \leq 2\pi). \quad (9)$$

С другой стороны, из равенства (7) вытекает оценка

$$\|x(t, x^{(0)}, 0) - y(t, x^{(0)}, 0)\| \leq c_2 \int_0^t \|F(x, \tau)\| d\tau \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

а отсюда при достаточно больших  $\|x^{(0)}\|$ , принимая во внимание (2) (9), получаем

$$\|x(t, x^{(0)}, 0) - y(t, x^{(0)}, 0)\| \leq c_2 L c_1 \int_0^t e^{c_2 L t} dt = c_1 (e^{c_2 L t} - 1).$$

Отсюда и из (5) заключаем, в силу  $c_1 \leq M \|x^{(0)}\|$ ,

$$\|v(x^{(0)}) - w(x^{(0)})\| \leq M (e^{2\pi c_2 L} - 1) \|x^{(0)}\| \quad (10)$$

при достаточно больших  $\|x^{(0)}\|$ .

Пусть теперь  $R$  — сфера достаточно большого радиуса с центром в начале координат. Будем считать постоянную  $L$  настолько малой, что выполняется неравенство

$$K \geq M (e^{2\pi c_2 L} - 1). \quad (11)$$

Тогда из оценок (4) и (10) вытекает, что ни в одной точке сферы  $R$  векторы  $v$  и  $w$  не обращаются в противоположно направленные и, сверх того,  $v$  ни в одной точке сферы  $R$  не обращается в нуль. Тогда ясно, что индексы сферы  $R$  в полях  $w$  и  $v$  совпадают. Мы доказали уже, что индекс точки  $x_1 = \dots = x_n = 0$ , как особой точки поля  $w(x)$ , равен  $\pm 1$ . Но сфера  $R$ , в силу неравенства (4), не охватывает особых точек поля  $w$ , отличных от  $x_1 = \dots = x_n = 0$ , и потому ее индекс в поле  $w$  равен  $\pm 1$ . Следовательно, индекс сферы  $R$  в поле  $v$  также равен  $\pm 1$ , а это значит, что сфера  $R$  охватывает хотя бы одну особую точку поля  $v$ . Таким образом, система (1) имеет хотя бы одно  $2\pi$ -периодическое решение. Теорема доказана.

Ленинградский государственный университет  
им. А. А. Жданова

Поступило  
28 X 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> М. А. Красносельский, ДАН, 111, № 2 (1956). <sup>2</sup> М. А. Красносельский, ДАН, 123, № 2 (1958). <sup>3</sup> Н. П. Еругин, Прикл. матем. и мех., 15, в. 1 (1951). <sup>4</sup> A. Wintner, Am. J. Math., 65, № 2, 277 (1945). <sup>5</sup> П. С. Александров, Комбинаторная топология, М.—Л., 1947. <sup>6</sup> Р. Беллман, Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, ИЛ, 1954. <sup>7</sup> В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, М.—Л., 1949.

А. И. СИРОТА

## ПРОСТЫЕ ПОДГРУППЫ ОДНОСВЯЗНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП ЛИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 26 XI 1960)

Простые подалгебры вещественных форм классических алгебр Ли найдены Ф. И. Карпелевичем <sup>(1)</sup>. Подалгебре  $G^*$  алгебры Ли  $G$  отвечает в односвязной группе  $\tilde{G}$ , соответствующей алгебре  $G$ , некоторая связная подгруппа  $\mathcal{G}^*$ , локально изоморфная односвязной группе  $\tilde{G}^*$  с алгеброй Ли  $G^*$ . В настоящей работе излагаются методы вычисления группы  $\mathcal{G}^*$ , т. е. ядра соответствующего гомоморфизма  $\tilde{G}^* \rightarrow \mathcal{G}^*$ . Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное,  $G^*$  и  $G$  — вещественные формы классических алгебр Ли, рассматриваемые в их каноническом линейном представлении.

1. Вложение  $G^* \subset G$  задается <sup>(1)</sup> с помощью линейного представления  $\varphi$  алгебры  $G^*$ ,  $\varphi: G^* \rightarrow G$ , которому соответствует, во-первых, гомоморфизм  $\tilde{\varphi}: \tilde{G}^* \rightarrow \tilde{G}$ , ядро которого  $\ker \tilde{\varphi}$  мы и будем отыскивать, а во-вторых, линейное представление  $\hat{\varphi}: \tilde{G}^* \rightarrow \mathcal{GL}$ , ядро которого  $\ker \hat{\varphi}$  может быть найдено по формулам работы <sup>(2)</sup>. Если линейная группа, отвечающая  $G$ , односвязна (т. е. совпадает с  $\tilde{G}$ ), то  $\ker \tilde{\varphi} = \ker \hat{\varphi}$ . Этому условию удовлетворяют  $G = J$  или  $C_n^I$ , которые в дальнейшем не рассматриваются.

Характеристические подалгебры алгебр  $G$  и  $G^*$  обозначим, соответственно, через  $P$  и  $P^*$ . Для них имеют место разложения:  $P = K \dot{+} V$ ,  $P^* = K^* \dot{+} V^*$ , где  $K$ ,  $K^*$  — полупростые компактные алгебры, каждая из которых состоит максимум из двух простых компонент, а  $V$ ,  $V^*$  — коммутативные алгебры размерности 0 или 1. Согласно <sup>(1)</sup>, можно считать  $\varphi(P^*) \subset P$ . Легко видеть, что тогда  $\varphi(K^*) \subset K$ .

В дальнейшем будет полезна:

Лемма 1.1). Если  $\varphi(P^*) \subset K$ ,  $K = K' \dot{+} K''$  — разложение на (нетривиальные) простые компоненты, а  $\psi_1, \dots, \psi_k$  — неприводимые компоненты линейного представления подалгебры  $P^*$ , индуцированного представлением  $\varphi$ , то для любого  $j = 1, \dots, k$  либо  $\varphi_j(P^*) \subset K'$ , либо  $\varphi_j(P^*) \subset K''$ , и, таким образом, на  $P^*$  представление  $\varphi = \varphi' \dot{+} \varphi''$ , где  $\varphi'(P^*) \subset K'$ ,  $\varphi''(P^*) \subset K''$ .

2) Если исключить из рассмотрения алгебры  $B_n^2$  и  $D_n^2$ , то при одномерной  $V$  подалгебре  $K \subset G$  отвечает односвязная линейная группа.

Теорема 1. Если линеаризирующий нормальный делитель <sup>(2)</sup> группы  $\tilde{G}$  и центр  $\tilde{G}^*$  — бесконечные циклические группы, то все подгруппы  $\tilde{G}$ , локально изоморфные  $\tilde{G}^*$ , либо односвязны, либо изоморфны линейным группам.

Здесь  $G$  и  $G^*$  — произвольные вещественные простые алгебры, а не только классические. Условия теоремы выполняются, например, когда  $G = A_n^I$ ,  $B_n^2$ ,  $D_n^2$ ,  $IC_n$  или  $JD_n$ , а  $G^* = A_n^I$  при о.н.д. ( $l$ ,  $n - l + 1 = 1$ ,  $IC_n$  или  $JD_n$  при нечетном  $n$  <sup>(2,3)</sup>).

Теорема 2. Если подалгебре  $K \subset G$  отвечает односвязная линейная группа, то либо  $\ker \tilde{\varphi} = \ker \hat{\varphi}$ , либо  $\ker \tilde{\varphi} = \ker \hat{\varphi} \cap \theta$ , где  $\theta$  — под-

группа центра группы  $\mathcal{G}^*$ , состоящая из всех элементов конечного порядка. В частности, если характеристическая подалгебра алгебры  $G$  полупроста ( $P^* = K^*$ ), то  $\ker \varphi = \ker \hat{\varphi}$ .

Условия теоремы выполняются в тех случаях, когда  $G$  — одна из алгебр типа  $A_n^l$ ,  $IC_n$  или  $JD_n$  <sup>(2)</sup>. Последнее утверждение теоремы решает нашу задачу для  $G^* = B_n^{2l}$ ,  $D_n^l$ ,  $I_n$  или  $J_n$  <sup>(3)</sup>. Остается рассмотреть случаи, когда  $G^* = A_{n-1}^l$ ,  $IC_n$  или  $JD_n$ . Поскольку все эти алгебры — первой категории, их вложение в  $G$  задается линейным представлением  $\varphi = m_1\varphi_1 + \dots + m_k\varphi_k$  ( $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  — неэквивалентные неприводимые представления;  $m_1, \dots, m_k$  — их кратности) и числами  $q_1, \dots, q_k$  <sup>(1)</sup>. Представление  $\varphi_i$  будем задавать старшим весом, координаты которого по Картану — Вейлю суть целые неотрицательные числа  $f_1 \geq \dots \geq f_n \geq 0$  <sup>(4)</sup>. Число  $v_i = f_1 + \dots + f_n$  называется рангом представления  $\varphi_i$ .

Пусть сначала  $G^* = A_{n-1}^l$ . Поскольку в этом случае  $P^* = A_{l-1} + \dots + A_{n-l-1} + V$ , представление подалгебры  $P^*$ , индуцированное представлением  $\varphi_i$ , разлагается на неприводимые компоненты вида  $\psi'_{i1} \times \psi''_{i1} + \dots + \psi'_{i2} \times \psi''_{i2} + \dots$ , где  $\psi'_{ij}$  — представление полной линейной алгебры  $L(l)$ ;  $\psi''_{ij}$  — представление  $L(n-l)$ ;  $\psi'_{ij} \times \psi''_{ij}$  — их тензорное произведение. Обозначим через  $N_{ij}$  размерность представления  $\psi'_{ij} \times \psi''_{ij}$ , через  $v_{ij}$  — ранг представления  $\psi'_{ij}$ .

Формула  $\ker \varphi = \ker \hat{\varphi}$  имеет место тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\sum_{i=1}^k q_i \sum_j (l v_i - n v_{ij}) N_{ij} = 0,$$

где внутреннее суммирование производится по всем  $j$ , для которых  $v_{ij}$  четно.

Пусть теперь  $G^* = IC_n$  или  $JD_n$ . Для этих алгебр  $P^* = V + A_n$ , и разложение представления подалгебры  $P^*$ , индуцированного представлением  $\varphi_i$ , имеет вид  $\psi_{i1} + \psi_{i2} + \dots$ , где  $\psi_{ij}$  — представление алгебры  $L(n)$  размерности  $N_{ij}$  и ранга  $v_{ij}$  (не обязательно положительного, поскольку старший вес может иметь здесь и отрицательные координаты), причем  $v_{ij} \equiv v_i \pmod{2}$  для всех  $j$ .

Формула  $\ker \varphi = \ker \hat{\varphi}$  имеет место тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\sum_{i=1}^k q_i \sum_j v_{ij} N_{ij} = 0,$$

где внутреннее суммирование производится по всем  $j$ , для которых  $v_{ij} \equiv v_i \pmod{4}$ .

Нам осталось рассмотреть случай, когда подалгебре  $K \subset G$  отвечает неодносвязная линейная группа. Согласно второму утверждению леммы, теперь  $V = 0$ , и, следовательно,  $\varphi(P^*) \subset K$  (случай  $G = B_n^2$  или  $D_n^2$  мы исключаем, чтобы не загромождать изложения). Поэтому, если алгебра  $K$  простая, то, как легко следует из леммы 1 работы <sup>(3)</sup>, вопрос сводится к вычислению ядра гомоморфизма в простую компактную группу, т. е. к задаче, решенной в <sup>(5)</sup> (это условие относительно  $K$  выполнено для случая  $G = I_n$ ). Если же  $K = K' + K''$  (что соответствует случаю  $G = B_n^{2l}$  или  $D_n^l$ , где  $K'$  и  $K''$  — ортогональные алгебры), то для применения результатов работы <sup>(5)</sup> необходимо найти, согласно лемме,  $\varphi'$  и  $\varphi''$ . Пусть  $\sigma$  — характеристический автоморфизм, выделяющий алгебру  $G^*$  из ее компактной формы  $R$  ( $\sigma$  действует в  $R$  и  $P^* \subset R$ ; см., например, <sup>(1)</sup>). Обозначим через  $\mathcal{R}$  односвязную компактную группу для алгебры Ли  $R$ , а через  $\mathcal{P}^* \subset \mathcal{R}$  — связную подгруппу,

соответствующую подалгебре  $P^*$ . Действие  $\sigma$  продолжим на  $\mathcal{R}$ . Пусть  $\overline{\mathcal{R}}$  — наименьшая группа, отвечающая следующим требованиям:  $\overline{\mathcal{R}}$  содержит  $\mathcal{R}$  и элемент  $s$  такой, что  $s^{-1}rs = \sigma(r)$  для всех  $r \in \mathcal{R}$  (если автоморфизм  $\sigma$  внутренний, то  $\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{R}$ ). Вложение  $G^* \subseteq G$  задается в общем случае линейным представлением алгебры  $G^*$  (а тем самым и  $R$ )

$$\varphi = m_1\varphi_1 + \dots + m_k\varphi_k + m_{k+1}(\varphi'_{k+1} + \varphi''_{k+1}) + \dots + m_p(\varphi'_p + \varphi''_p),$$
где  $\varphi_h \sim \varphi_h$  ( $h = 1, \dots, k$ ),  $\varphi'_i \sim \varphi'_i$  ( $i = k+1, \dots, p$ ) и набором чисел  $q_1, \dots, q_k$  или  $l_1, \dots, l_k$ , где  $q_h = m_h - 2l_h$  <sup>(1)</sup>. Представление  $\varphi_h$ , в силу условия  $\varphi_h \sim \varphi_h$ , можно распространить на всю группу  $\overline{\mathcal{R}}$ . Пусть  $\overline{\mathcal{P}}^*$  — наименьшая подгруппа  $\overline{\mathcal{R}}$ , содержащая  $\mathcal{P}^*$  и  $s$ , а  $\psi_1 + \psi_2 + \dots$  — разложение на неприводимые компоненты представления группы  $\overline{\mathcal{P}}^*$ , индуцированного представлением  $\varphi_h$ . Каждое  $\psi_j$ , рассматриваемое на  $\mathcal{P}^*$ , либо остается неприводимым, либо распадается на две компоненты. Пусть  $\chi_j$  — характер представления  $\psi_j$ ,  $N_j$  — его размерность; тогда для всех  $j$   $\chi_j(s) = \pm \lambda N_j$ , где  $\lambda$  — некоторое число. Положим  $\varphi'_h = \sum \psi_j$ , где суммирование распространяется на все  $j$ , для которых  $\chi_j(s) = \lambda N_j$ . Остальные  $\psi_j$  составляют  $\varphi''_h$ . После того как найдены  $\varphi'_h, \varphi''_h$ , можно найти  $\varphi', \varphi''$ :

$$\begin{aligned} \varphi' &= \sum_{h=1}^k [(m_h - l_h) \varphi'_h + l_h \varphi''_h] + \sum_{i=k+1}^p m_i \varphi'_i, \\ \varphi'' &= \sum_{h=1}^k [l_h \varphi'_h + (m_h - l_h) \varphi''_h] + \sum_{i=k+1}^p m_i \varphi''_i. \end{aligned}$$

2. При фактическом использовании полученных результатов в ряде случаев приходится искать неприводимые компоненты представления характеристической подалгебры  $P^*$ , индуцированного некоторым неприводимым представлением алгебры  $G^*$ .

Рассмотрим на полной линейной группе  $\mathcal{GL}(r)$  функцию  $\{f_1, \dots, f_u\}$ , определенную при заданных целых неотрицательных числах  $f_1, \dots, f_u$  формулой

$$\{f_1, \dots, f_u\} = |p_{l_1 - u + 1}, \quad p_{l_2 - u + 2}, \dots, p_{l_u}|.$$

Здесь в правой части выписана  $i$ -я строка определителя  $u$ -го порядка, причем  $l_1 = f_1 + u - 1, \quad l_2 = f_2 + u - 2, \dots, \quad l_u = f_u$ , а величины  $p_0, p_1, p_2, \dots$  определяются из равенств

$$\frac{1}{|E - zA|} = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots, \quad p_{-k} = 0 \quad \text{при } k = 1, 2, \dots;$$

$A$  — элемент группы  $\mathcal{GL}(r)$ , на котором вычислено значение  $\{f_1, \dots, f_u\}$ . Если  $u = r$  и  $f_1 \geq \dots \geq f_r \geq 0$ , то, как известно <sup>(4)</sup>, функция  $\{f_1, \dots, f_r\}$  равна характеру  $\chi(f_1, \dots, f_r)$  неприводимого представления группы  $\mathcal{GL}(r)$  со старшим весом  $f_1, \dots, f_r$ .

Легко проверить следующие свойства функции  $\{f_1, \dots, f_u\}$  <sup>(4)</sup>: 1)  $\{f_1, \dots, f_{u-1}, 0\} = \{f_1, \dots, f_{u-1}\}$ ; 2) если  $f_u < 0$  или если  $f_1 \geq \dots \geq f_u \geq 0$  и  $u > r$ , то  $\{f_1, \dots, f_u\} = 0$ ; 3) если  $f_{i+1} - f_i = 1$ , то  $\{\dots, f_i, f_{i+1}, \dots\} = 0$ , если же  $f_{i+1} - f_i > 1$ , то  $\{\dots, f_i, f_{i+1}, \dots\} = \{\dots, f_{i+1} - 1, f_i + 1, \dots\}$ .

С помощью последнего свойства можно привести такую функцию к виду, для которого  $f_1 \geq \dots \geq f_u$ , и тогда оказывается, что она равна

\* Чтобы сохранить формулу работы <sup>(1)</sup> для сигнатуры алгебры  $G$ , следовало бы менять местами  $\varphi'_h$  и  $\varphi''_h$  в тех случаях, когда размерность  $\varphi'_h$  оказывается меньше размерности  $\varphi''_h$ .

либо 0, либо некоторому примитивному характеру группы  $\mathcal{GL}(r)$ , взятому, быть может, со знаком минус.

Введем операторы  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , действующие на функции  $\{f_1, \dots, f_u\}$  по формуле  $\xi_i \{f_1, \dots, f_i, \dots, f_u\} = \{f_1, \dots, f_i - 1, \dots, f_u\}$ .

Рассмотрим подгруппу  $\mathcal{GL}(l) \cdot \mathcal{GL}(n-l)$  группы  $\mathcal{GL}(n)$ , состоящую из матриц  $A = A_1 + A_2$ , где  $A_1$ ,  $A_2$  — диагональные клетки матрицы  $A \in \mathcal{GL}(n)$  размерностей  $l$  и  $n-l$ , соответственно. Характер  $\chi(f_1, \dots, f_n)$   $f_1 \geq \dots \geq f_n \geq 0$ , некоторого неприводимого представления  $\varphi$  группы  $\mathcal{GL}(n)$  на этой подгруппе может быть представлен в виде

$$\chi(f_1, \dots, f_n) = \sum_{f_1 \geq s_1 \geq \dots \geq s_n \geq 0} (\nabla(s_1, \dots, s_n) \{f_1, \dots, f_n\}) \cdot \{s_1, \dots, s_n\};$$

где значение  $\{s_1, \dots, s_n\}$  вычислено в точке  $A_2 \in \mathcal{GL}(n-l)$ , а функции полученные в результате действия оператора

$$\nabla(s_1, \dots, s_n) = \frac{|\xi_i^{t_1} \dots \xi_i^{t_n}|}{|\xi_i^{n-1} \dots 1|}, \quad t_1 = s_1 + n - 1, \dots, t_n = s_n,$$

на  $\{f_1, \dots, f_n\}$ , вычисляются в точке  $A_1 \in \mathcal{GL}(l)$ . Выражение, которое получается при этом, может быть, согласно сказанному выше, приведено к виду  $\sum c_q \chi'_q \chi''_q$ , где  $c_q$  — целые числа, а  $\chi'_q$  и  $\chi''_q$  — примитивные характеры  $\mathcal{GL}(l)$  и  $\mathcal{GL}(n-l)$ , соответственно. Поскольку  $\chi'_q \cdot \chi''_q$  есть характер некоторого неприводимого представления группы  $\mathcal{GL}(l) \cdot \mathcal{GL}(n-l)$ , а выражение характера приводимого представления группы в виде линейной комбинации примитивных характеров однозначно, все  $c_q \geq 0$  и равенство

$$\chi(f_1, \dots, f_n) = \sum c_q \chi'_q \chi''_q$$

дает разложение на неприводимые компоненты представления группы  $\mathcal{GL}(l) \cdot \mathcal{GL}(n-l)$ , индуцированного представлением  $\varphi$  группы  $\mathcal{GL}(n)$ .

Положив  $\pi_k = \sum_{i_1 + \dots + i_n = k, i \geq 0} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_n^{i_n}$ , можно выразить оператор

$\nabla(s_1, \dots, s_n)$  через  $\xi_1, \dots, \xi_n$  целым рациональным образом:

$$\nabla(s_1, \dots, s_n) = |\pi_{t_1 - n + 1}, \dots, \pi_{t_n}|.$$

Полученное разложение представления  $\varphi$ , очевидно, решает задачу, поставленную в начале этого пункта, для алгебр  $A_{n-1}^i$ . Аналогичная задача для алгебр  $I_n$  (для которых  $P^*$  — ортогональная алгебра) решена в (4, 6). С помощью методов (6) и полученных здесь результатов можно найти разложение представлений характеристических подалгебр и для остальных классических вещественных алгебр Ли.

Поступило  
24 XI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Ф. И. Карпелевич, Тр. Моск. матем. общ., 4, 3 (1955). <sup>2</sup> А. И. Сирота, ДАН, 134, № 3 (1960). <sup>3</sup> А. И. Сирота, ДАН, 134, № 1 (1960). <sup>4</sup> Г. Вейль, Классические группы, М., 1947. <sup>5</sup> Е. Б. Дынкин, А. Л. Онисьик, УМН, 10, № 4 (1955). <sup>6</sup> Ф. Мурнаган, Теория представлений групп, М., 1950, стр. 380.

В. Я. СТЕЦЕНКО

# К ГЕОМЕТРИИ КОНУСОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком П. С. Александровым 23 XI 1960)

1. По М. Г. Крейну<sup>(1)</sup>, конус  $K$  в вещественном банаховом пространстве  $E$  называется нормальным, если существует такое  $\delta > 0$ , что из  $e_1, e_2 \in K$ ,  $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$  следует

$$\|e_1 + e_2\| \geq \delta. \quad (1)$$

И. А. Бахтин показал<sup>(4,5)</sup>, что это определение равносильно следующему: конус  $K$  называется нормальным, если существует такая постоянная  $M > 0$ , что из неравенств  $0 \leq x \leq y$  следует неравенство  $\|x\| \leq M\|y\|$  (здесь знаком  $\leq$  обозначено, как обычно, отношение полуупорядоченности, порождаемое в  $E$  конусом  $K$ ).

Отправляясь от признака И. А. Бахтина нормальности конуса, в<sup>(3)</sup> было предложено следующее обобщение этого понятия на случай банаховых пространств с двумя конусами: пусть  $K_0$  и  $K$  — конусы в вещественном банаховом пространстве  $E$ , причем  $K_0 \subset K$ . Знаком  $\leq$  обозначим отношение полуупорядоченности, порождаемое в  $E$  конусом  $K$ .

Определение 1. Конус  $K_0$  называется  $K$ -нормальным, если существует такая постоянная  $M$ , что для любых элементов  $x, y \in K_0$  из неравенства  $x \leq y$  (т. е.  $y - x \in K$ ) следует, что  $\|x\| \leq M\|y\|$ .

Определение М. Г. Крейна нормальности конуса естественно обобщить на случай пространств с двумя конусами следующим образом:

Определение 2. Конус  $K_0$  будем называть  $K$ -нормальным ( $K_0 \subset K$ ), если существует такое положительное  $\delta$ , что из  $f_1^0 \in K_0$ ,  $f_2 \in K$ ,  $f_1^0 + f_2 \in K_0$  следует неравенство

$$\|f_1^0 + f_2\| \geq \delta \max \{\|f_1^0\|, \|f_2\|\}. \quad (2)$$

Теорема 1. Определения  $K$ -нормальности 1 и 2 эквивалентны.

Докажем, например, что если конус  $K_0$  является  $K$ -нормальным в смысле определения 1, то он обладает тем же свойством и в смысле определения 2. В предположении противного нашли бы такие две последовательности  $f_n^0 \in K_0$ ,  $f_n \in K$ , что  $f_n^0 + f_n \in K$  и

$$\|f_n^0 + f_n\| \leq \frac{1}{n^3} \max \{\|f_n^0\|, \|f_n\|\} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Из неравенств (3) вытекает справедливость для всех  $n = 2, 3, \dots$  неравенств  $\frac{1}{2}\|f_n^0\| \leq \|f_n\| \leq 2\|f_n^0\|$ , откуда  $\|f_n^0 + f_n\| \leq \frac{1}{n^3} 2\|f_n^0\|$  ( $n = 2, 3, \dots$ ). Последнее неравенство означает, что ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left( n \frac{f_n^0}{\|f_n^0\|} + n \frac{f_n}{\|f_n^0\|} \right) \quad (4)$$

сильно сходится. Обозначим сумму этого ряда через  $f^*$ . Очевидно, что  $f^* \in K_0$  и  $nf_n^0/\|f_n^0\| \leq f^*$  ( $n = 2, 3, \dots$ ). Так как  $nf_n^0/\|f_n^0\| \in K_0$  ( $n = 2, 3, \dots$ ), то из последнего неравенства и  $K$ -нормальности конуса  $K_0$  в смысле определения 1 следует, что  $nf_n^0/\|f_n^0\| = n \leq M\|f^*\|$  ( $n = 2, 3, \dots$ ). Мы пришли к противоречию.

Отметим, что из  $K$ -нормальности конуса  $K_0$  не вытекает нормальность конуса  $K$ . Так, например, каждый локально компактный <sup>(2)</sup> конус  $K_0$  будет  $K$ -нормальным по любому конусу  $K$  ( $K \supset K_0$ ). Другой нетривиальный пример  $K$ -нормального конуса в пространстве  $C^1[0, 1]$  с нормой  $\|x(t)\|_{C^1} = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |x'(t)|$  при конусе  $K$  всех неотрицательных функций образует конус  $K_0$  всех неотрицательных выпуклых функций, обращающихся в нуль на концах сегмента  $[0, 1]$ . Конус  $K$  свойством нормальности не обладает. Однако конус  $K_0$  является  $K$ -нормальным конусом: из  $x(t) \leq y(t)$  ( $x(t), y(t) \in K_0$ ) следует, что  $\|x(t)\|_{C^1} \leq \|y(t)\|_{C^1}$ . Отметим, что, более того, рассматриваемый конус  $K_0$  будет  $K$ -правильным (но не вполне  $K$ -правильным).

2. Пусть  $E$  — вещественное банахово пространство,  $K_0$  и  $K$  — конусы в нем;  $u_0$  — некоторый фиксированный ненулевой элемент из  $K_0$ . Всюду ниже знаком  $\leq^{(0)}$  будем обозначать полуупорядоченность, порожденную в  $E$  конусом  $K_0$ , знаком  $\leq$  — полуупорядоченность, установленную в  $E$  конусом  $K$ . Через  $E_{u_0}$  обозначим множество тех элементов  $x \in E$ , для которых при некоторых неотрицательных  $a$  и  $b$  выполнены неравенства

$$-bu_0 \leq^{(0)} x \leq au_0. \quad (5)$$

Обозначим через  $b(x)$  и  $a(x)$  точные нижние границы чисел  $b$  и  $a$ , удовлетворяющих (5). Наибольшее из чисел  $b(x)$ ,  $a(x)$  обозначим через  $\|x\|_{u_0}$ . В силу (5) и замкнутости конуса  $-\|x\|_{u_0}u_0 \leq^{(0)} x \leq \|x\|_{u_0}u_0$ , где  $\|x\|_{u_0}$  есть наименьшее из чисел  $c > 0$ , удовлетворяющих неравенствам  $-cu_0 \leq^{(0)} x \leq cu_0$ . Функционал  $\|\cdot\|_{u_0}$ , определенный на элементах множества  $E_{u_0}$ , удовлетворяет следующим двум аксиомам нормы: 1)  $\|x\|_{u_0} \geq 0$  ( $x \in E_{u_0}$ ), причем  $\|x\|_{u_0} = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = 0$ ; 2) если  $x, y \in E_{u_0}$ , то  $\|x + y\|_{u_0} \leq \|x\|_{u_0} + \|y\|_{u_0}$  \*.

В обобщение одной теоремы М. А. Красносельского <sup>(2)</sup> можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. Для того чтобы конус  $K_0$  был  $K$ -нормален, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\|x\|_E \leq M\|x\|_{u_0}\|u_0\|_E \quad (x \in E_{u_0}, u_0 \in K_0), \quad (6)$$

в котором постоянная  $M$  не зависит ни от  $u_0 \in K_0$  ( $u_0 \neq \theta$ ), ни от  $x \in E_{u_0}$ .

Доказательство необходимости. Допустим, что такой постоянной  $M$  не существует — допустим, что найдутся такие последовательности  $x_n, u_n$ , что  $u_n \in K_0$  ( $u_n \neq \theta$ ),  $x_n \in E_{u_n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) и

$$\|x_n\|_E \geq n\|x_n\|_{u_n}\|u_n\|_E \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Тогда  $-u_n/n\|u_n\|_E \leq^{(0)} x_n/\|x_n\|_E \leq u_n/n\|u_n\|_E$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Поэтому, если  $y_n = u_n/n\|u_n\|_E - x_n/\|x_n\|_E$ ,  $z_n^0 \in K_0$ ,  $z_n^0 + y_n \in K_0$  и  $y_n \in K$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Но тогда, в силу  $K$ -нормальности конуса  $K_0$ , должно иметь место неравенство  $\|z_n^0 + y_n\| \geq \delta \max\{\|z_n^0\|, \|y_n\|\} \geq \leq \delta(1 - 1/n)$ , а поэтому при  $n \geq 2$   $\|z_n^0 + y_n\| \geq \delta/2$ . С другой стороны,

\* В случае, когда  $K_0 = K$ , функционал  $\|x\|_{u_0}$  совпадает с так называемой  $u_0$ -нормой;  $u_0$ -норма применялась многими авторами.

$\|z_n^0 + y_n\| = 2/n \rightarrow 0$ . Полученное противоречие доказывает необходимость неравенства (6) для  $K$ -нормальности конуса  $K_0$ .

Доказательство достаточности также проведем от противного: пусть неравенство (6) выполнено, а конус  $K_0$  не обладает свойством  $K$ -нормальности. Тогда найдется такая последовательность  $f_n^0 \in K_0$  и такой элемент  $f^* \in K_0$ , что  $nf_n^0 / \|f_n^0\| \leq f^*$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) (см. доказательство теоремы 1). Поэтому  $\|nf_n^0 / \|f_n^0\| \|f^*\| \leq 1$  ( $n = 2, 3, \dots$ ), и, значит, в силу (6),  $n = \|nf_n^0 / \|f_n^0\| \leq M \|f^*\|$  ( $n = 2, 3, \dots$ ), что невозможно. Теорема доказана.

3. Будем говорить, что конус  $K_0$  является  $K$ -воспроизводящим ( $K_0 \subset K$ ), если для каждого  $x \in E$  можно указать такой элемент  $u \in K_0$ , что  $x \leq u$ . Иными словами, конус  $K_0$  называется  $K$ -воспроизводящим, если любой элемент  $x \in E$  представим в виде  $x = u - v$ , где  $u \in K_0$ ,  $v \in K$ . Понятие  $K$ -воспроизводящего конуса представляет естественное обобщение понятия воспроизводящего конуса <sup>(1)</sup>. Примерами  $K$ -воспроизводящих (но не воспроизводящих) конусов  $K_0$  могут служить, например, конус  $K_0$  неотрицательных неубывающих функций в пространстве  $C[0, 1]$  при конусе  $K$  неотрицательных функций и конус  $K_0$  выпуклых неотрицательных функций в пространстве  $C_0^1[0, 1]$  непрерывно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль на концах  $[0, 1]$ , при конусе  $K$  неотрицательных функций.

М. Г. Крейн показал <sup>(1)</sup>, что конус  $K$  нормален тогда и только тогда, когда полугруппа  $K^*$  положительных на  $K$  линейных функционалов воспроизводит  $E^*$ , т. е. для любого  $f \in E^*$  имеет место представление  $f = g - h$ , где  $g, h \in K^*$ .

**Теорема 3.** Пусть конус  $K_0$  является  $K$ -воспроизводящим, а  $K_0^* -$  конус. Тогда  $K^*$  является  $K_0^*$ -нормальным конусом.

Нам неизвестно, справедливо ли обратное утверждение.

4. В случае, если конус  $K$  воспроизводящий, для каждого  $x \in E$  найдется такой элемент  $u(x) \in K$ , что  $x \leq u(x)$  и  $\|u(x)\| \leq M \|x\|$ , где постоянная  $M$  не зависит от выбора элемента  $x$ . Это свойство М. А. Красносельский предложил называть свойством несплюсненности конуса. Около 20 лет назад несплюсненность каждого воспроизводящего конуса была доказана М. Г. Крейном и В. Л. Шмудьяном. М. А. Красносельский показал, что несплюсненность воспроизводящего конуса играет существенную роль при изучении производных по направлениям конуса (было выяснено, когда из дифференцируемости по направлениям конуса вытекает существование обычных производных; найдены условия полной непрерывности производных по конусу и т. д.). В связи с этим И. А. Бахтин снова рассмотрел вопрос о несплюсненности воспроизводящих конусов и предложил новое доказательство несплюсненности каждого воспроизводящего конуса.

Будем говорить, что конус  $K_0$  называется  $K$ -несплюсненным, если для любого  $x \in E$  существует такой элемент  $u(x) \in K_0$ , что  $x \leq u(x)$  и  $\|u(x)\| \leq M \|x\|$ , где  $M$  — постоянная.

**Теорема 4.** Классы  $K$ -несплюсненных и  $K$ -воспроизводящих конусов совпадают.

Не имея возможности остановиться на доказательстве этой теоремы, отметим, что при ее доказательстве нами использованы построения И. А. Бахтина.

5. В связи с тем, что в приложениях теории пространств с конусом к нелинейным задачам важную роль играет возможность переходить к пределу по монотонным ограниченным последовательностям, М. А. Красносельский <sup>(2, 3)</sup> предложил следующие определения. Конус  $K_0$  называется  $K$ -правильным, если для любой последовательности  $x_n \in K_0$  из неравенств

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots; \quad (7)$$

$$x_n \leq u \quad (u \in K_0, n = 1, 2, \dots) \quad (8)$$

следует сходимость последовательности  $x_n$ . Конус  $K_0$  называется вполне  $K$ -правильным, если для любой последовательности  $x_n \in K_0$  из неравенств (7) и

$$\|x_n\| \leq M \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (9)$$

следует ее сходимость. Взаимосвязь между этими понятиями для случая  $K = K_0$  была рассмотрена в (2), некоторые теоремы для случая  $K \neq K_0$  указаны в (3). Здесь мы укажем одно дополнение к этим теоремам.

**Теорема 5.** *Каждый вполне  $K$ -правильный конус  $K_0$  правилен.*

Из этой теоремы, в частности, вытекает, что каждый вполне  $K$ -правильный конус  $K_0$  является  $K$ -нормальным.

6. Рассмотрение слабой топологии позволяет ввести дальнейшее обобщение понятия правильности конуса. Будем говорить, что конус  $K_0$  слабо  $K$ -правилен, если для любой последовательности  $x_n \in K_0$  из неравенств (7) и (8) следует ее слабая сходимость. Будем называть конус  $K_0$  слабо вполне  $K$ -правильным, если он  $K$ -нормален и если из неравенств (7) и (9) ( $x_n \in K_0, n = 1, 2, \dots$ ) следует слабая сходимость последовательности  $x_n$ . Приведем без доказательства несколько теорем о слабо  $K$ -правильных и слабо вполне  $K$ -правильных конусах.

**Теорема 6.** *Слабо  $K$ -правильный конус  $K_0$  есть  $K$ -нормальный конус.*

**Теорема 7.** *Каждый слабо вполне  $K$ -правильный конус  $K_0$  слабо  $K$ -правилен.*

Обратная теорема не верна.

**Теорема 8.** *Слабо вполне  $K$ -правильный конус  $K_0$  вполне  $K$ -правилен тогда и только тогда, когда он  $K$ -правилен.*

**Теорема 9.** *Для того чтобы конус  $K_0$  был слабо  $K$ -правилен, или слабо вполне  $K$ -правилен, достаточно, чтобы пространство  $E$  было слабо полным, а линейная оболочка множества  $K^*$  была плотна в  $E^*$ .*

Из последней теоремы вытекает, в частности, что в слабо полных пространствах ( $\mathcal{L}_p$  и т. д.) каждый нормальный конус слабо правилен и слабо вполне правилен.

Поступило  
22 XI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> М. Г. Крейн, М. А. Рутман, УМН, 3, в. 1 (23) (1948). <sup>2</sup> М. А. Красносельский, ДАН, 135, № 2 (1960). <sup>3</sup> В. Я. Стеценко, ДАН, 136, № 5 (1961). <sup>4</sup> И. А. Бахтин, Тр. семинара по функциональн. анализу, Воронежск. гос. унив., в. 6 (1958). <sup>5</sup> И. А. Бахтин, Диссертация, Воронеж, 1958.

ТАН ЧЖЭНЬ

ОБ ОШИБКАХ ОКРУГЛЕНИЙ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ  
СИСТЕМ СОВМЕСТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ  
УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ХОЛЕЦКОГО И МЕТОДОМ  
ГЛАВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 11 XI 1960)

1. В работе Неймана и Гольдштейна<sup>(1)</sup> наиболее детально исследованы ошибки округлений в методе главных элементов для машин с фиксированной запятой. Нами получены оценки ошибок округлений в методе Холецкого для машин, работающих в двоичной системе с  $\lambda$  двоичными разрядами в режиме плавающей запятой. При этом предполагается, что для любых двух вещественных чисел  $c$  и  $d$  точные алгебраические операции (сложение «+», вычитание «-», умножение «·», деление «/», извлечение корня « $(\ )^{1/2}$ » и соответствующие псевдооперации («+\*», «-\*», «×», «:», «√») удовлетворяют следующим условиям

$$\begin{aligned}(c + d) - (c + *d) &= (c + d) \varepsilon_1, \\(c - d) - (c - *d) &= (c - d) \varepsilon_2, \\c \cdot d - c \times d &= (c \cdot d) \varepsilon_3, \\c/d - c : d &= (c/d) \varepsilon_4 \quad (\text{при } d \neq 0), \\(c)^{1/2} - \sqrt{c} &= (c)^{1/2} \varepsilon_5 \quad (\text{при } c \geq 0),\end{aligned}$$

где  $|\varepsilon_i| \leq 2^{-\lambda}$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ).

Пусть  $m$  систем с одной и той же симметрической матрицей  $A$  порядка  $n$  записаны в виде

$$AX = B,$$

где  $B$  — матрица из правых частей систем размерности  $n \times m$ ;  $X$  — матрица неизвестных размерности  $n \times m$ . Допустим, что  $\bar{L}'\bar{L}$  есть приближенное разложение симметрической матрицы  $A$ , где  $\bar{L}$  и  $\bar{L}'$  являются, соответственно, верхней треугольной матрицей и ее транспонированной матрицей. Будем иметь

$$M(A - \bar{L}'\bar{L}) \leq [1/2(n^2 + n + 6) M^2(\bar{L}) + (n - 2) M(A)] 2^{-\lambda},$$

где  $M(A)$  обозначает максимум модулей элементов матрицы  $A$ . Если обозначим через  $\bar{Y}$  приближенное решение уравнения  $\bar{L}'Y = B$ , то получим

$$M(B - \bar{L}'\bar{Y}) \leq [1/2(n^2 + 5n - 8) M(\bar{L})M(\bar{Y}) + 2M(B)] 2^{-\lambda}.$$

Кроме того, будет иметь место неравенство

$$M[\bar{L}'(\bar{Y} - \bar{L}\bar{X})] \leq [(1/6n^3 + 3/2n^2 - 8/3n) M^2(\bar{L}) M(\bar{X}) + 2nM(\bar{L}) M(\bar{Y})] 2^{-\lambda}.$$

Окончательно получим оценку

$$M(B - \bar{A}\bar{X}) \leq [(3/2)n^3 + 2n^2 + 1/3n] M^2(\bar{L}) M(\bar{X}) + \\ + (1/2n^2 + \frac{9}{2}n - 4) M(\bar{L}) M(\bar{Y}) + (n^2 - 2n) M(A) M(\bar{X}) + 2M(B) 2^{-\lambda}. (1)$$

В качестве примера рассматриваем матрицу  $A = SS'$  порядка 15, где

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & 15 \\ 15 & 1 & \dots & 14 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Для  $\lambda = 35$  при обращении матрицы  $A$  правая часть оценки (1) дает  $0,95 \cdot 10^{-6}$ , которое близко к действительной ошибке в левой части, равной  $0,14 \cdot 10^{-8}$ .

Практически для больших  $n$  можно рассматривать только главный член в оценке (1), именно  $2/3 n^3 M^2(\bar{L}) M(\bar{X}) 2^{-\lambda}$ . Тогда в данном случае вместо  $0,95 \cdot 10^{-6}$  получаем  $0,72 \cdot 10^{-6}$  — результат, незначительно отличающийся от предыдущего.

Для больших  $n$  главная часть ошибки  $N(B - \bar{A}\bar{X})$  не превосходить  $0,58 n^3 N^2(\bar{L}) N(\bar{X}) 2^{-\lambda}$ , где  $N(A) = (\text{Sp } A'A)^{1/2}$ , а главная часть ошибки  $|I - A\bar{X}|$  не превзойдет  $0,58 n^3 |\bar{L}|^2 |\bar{X}| 2^{-\lambda}$  или  $0,58 n^3 |A\bar{X}| P(A) 2^{-\lambda}$ . Здесь  $|A| = \max_{z \neq 0} \frac{|Az|}{|z|}$ , где  $z$  обозначает  $n$ -мерный вектор, и  $P(A) = \frac{\lambda_1}{\lambda_n}$ , где  $\lambda_1, \lambda_n$  — соответственно наибольшее и наименьшее собственные значения симметрической матрицы  $A$ .

2. Принято считать <sup>(2,3)</sup>, что в применении к решению систем совместных линейных алгебраических уравнений с симметрическими матрицами метод Холецкого является более точным, чем другие методы. Возникает вопрос, можно ли доказать, что метод Холецкого является более точным, чем метод главных элементов. Наши теоретические исследования и попытки решения этой задачи привели к примеру, для которого метод Холецкого дает менее точный результат, чем метод главных элементов.

Рассматриваем систему уравнений в виде

$$Ax = b,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 200 & -100 & 400 & -310 & 100 \\ -100 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 400 & 2 & 3 & 3 & -1 \\ -300 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 100 & 3 & -1 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 11 \\ 14 \\ 4 \\ 16 \\ 18 \end{bmatrix}$$

и  $x$  — вектор-столбец неизвестных. Для этой системы методом Холецкого получено на машине Стрела решение

$$x = \begin{bmatrix} -0,773529482 \cdot 10^{-1} \\ 0,282058854 \cdot 10^{-2} \\ 0,100000004 \cdot 10 \\ -0,973529539 \cdot 10 \\ -0,473529496 \cdot 10 \end{bmatrix},$$

причем

$$r = Ax - b = \begin{bmatrix} 0,72 \cdot 10^{-5} \\ 0 \\ 0,43 \cdot 10^{-6} \\ -0,70 \cdot 10^{-6} \\ -0,10 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix},$$

так что

$$\|r\|_1 = 0,72 \cdot 10^{-5}, \quad \|r\|_2 = 0,84 \cdot 10^{-5}, \quad \|r\|_3 = 0,72 \cdot 10^{-5},$$

а методом главных элементов решение

$$x = \begin{bmatrix} -0,773529411 \cdot 10^{-1} \\ 0,282058823 \cdot 10^{-2} \\ 0,100000000 \cdot 10 \\ -0,973529411 \cdot 10 \\ -0,473529411 \cdot 10 \end{bmatrix},$$

причем

$$r = \begin{bmatrix} 0,35 \cdot 10^{-5} \\ -0,10 \cdot 10^{-6} \\ -0,60 \cdot 10^{-7} \\ -0,10 \cdot 10^{-6} \\ -0,80 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix},$$

так что

$$\|r\|_1 = 0,35 \cdot 10^{-5}, \quad \|r\|_2 = 0,46 \cdot 10^{-5}, \quad \|r\|_3 = 0,34 \cdot 10^{-5},$$

где  $\|r\|_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — нормы векторов (4).

Эти результаты означают, что метод Холецкого не является во всех случаях более точным, чем метод главных элементов, как принято считать. Итак, потеря точности при решении систем уравнений по тому и другому методу приблизительно одинакова.

В заключение я выражаю искреннюю благодарность М. Р. Шуре-Буре за помощь в выполнении этой работы.

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

Поступило  
4 XI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> J. Neumann, H. H. Goldstine, Bull. Am. Math. Soc., 53 (1947); М. Р. Шура-Буре, УМН, 6, в. 4 (1951). <sup>2</sup> L. Fox, H. D. Huskey, J. H. Wilkinson, Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1, 149 (1948); УМН, 5, в. 3 (1950). <sup>3</sup> A. M. Turing, Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1, 287 (1948); УМН, 6, в. 1 (1951). <sup>4</sup> В. Н. Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, М.—Л., 1950.

М. Ф. ТИМАН

# ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 19 XI 1960)

Благодаря исследованиям С. Н. Бернштейна <sup>(1)</sup>, А. Зигмунда <sup>(2)</sup>, Харди <sup>(2)</sup> и дальнейшему обобщению и развитию их результатов в работах С. Б. Стечкина <sup>(3-6)</sup>, а также А. А. Конюшкова <sup>(7)</sup> в настоящее время известны в некотором смысле исчерпывающие признаки абсолютной сходимости рядов Фурье для функций одной переменной. Результаты по абсолютной сходимости кратных рядов Фурье носят менее законченный характер. При этом соответствующие условия для абсолютной сходимости обычно содержат ограничения на функцию как по каждой из ее переменных в отдельности, так и по различным группам этих переменных <sup>(8-17)</sup>.

Естественно возникает вопрос о том, с какими свойствами функции только по каждой из переменных в отдельности связана абсолютная сходимость ее ряда Фурье. Для функций, принадлежащих на кубе периодов лебеговским классам  $L_p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ), такими характеристиками их свойств могут служить частные наилучшие приближения функции  $f(x_1, \dots, x_k)$

$$E_{n_v, \infty}(f)_{L_p} = \inf_{\Phi_\mu \in L_p} \left\| f(x_1, \dots, x_k) - \sum_{-n_v}^{n_v} \Phi_\mu(x_1, \dots, x_{v-1}, x_{v+1}, \dots, x_k) e^{i\mu x_v} \right\|_{L_p}$$

либо частные модули гладкости

$$\omega_r(j; h_v)_{L_p} = \sup_{|t| \leq h_v} \left\| \sum_{\mu=0}^r (-1)^{r-\mu} \binom{r}{\mu} f(x_1, \dots, x_{v-1}, x_v + \mu t, x_{v+1}, \dots, x_k) \right\|_{L_p}.$$

Нетрудно убедиться, что условия, обычно накладываемые на функцию  $f(x_1, \dots, x_k)$  по каждой из ее переменных в отдельности и обеспечивающие абсолютную сходимость соответствующего простого ряда Фурье, еще недостаточны для абсолютной сходимости кратного ряда Фурье функции  $f(x_1, \dots, x_k)$ . Для этого рассмотрим, например, функцию  $f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin mx \sin ny}{m^2 + n^2}$ . Очевидно, что в данном случае  $E_{m, \infty}(f)_{L_2} = O\left(\frac{1}{m}\right)$ ,

$E_{\infty, n}(f)_{L_2} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ , благодаря чему сходятся ряды  $\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1/2} E_{m, \infty}(f)_{L_2}$  и

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} E_{\infty, n}(f)_{L_2}$  и, следовательно <sup>(3)</sup>, абсолютно сходятся ряды Фурье функции  $f(x, y)$  по переменной  $x$  (почти для всех  $y$ ) и по переменной  $y$  (почти для всех  $x$ ). Однако этот ряд не будет абсолютно сходящимся.

Таким образом, свойства функции  $f(x_1, \dots, x_k)$  по каждой из переменных в отдельности, обеспечивающие абсолютную сходимость ее ряда Фурье, должны быть в некотором смысле более сильными, чем соответствующие свойства для функции одной переменной.

**Теорема 1.** Пусть периодическая периода  $2\pi$  по каждой из переменных функция  $f(x_1, \dots, x_k) \in L_2$  и пусть  $c_{n_1, \dots, n_k}$  — ее коэффициенты Фурье. Если для некоторой системы чисел  $\alpha_v > 0$  ( $v = 1, 2, \dots, k$ )  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 1$  и любого  $v = 1, 2, \dots, k$  выполнены условия

$$\sum_{n_v=1}^{\infty} n_v^{-1/2} E_{n_v, \infty}^{\alpha_v}(f)_{L_2} < \infty, \quad (1)$$

то ряд

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \dots \sum_{-\infty}^{\infty} |c_{n_1, \dots, n_k}| \quad (2)$$

сходится\*. Если числа  $|c_{n_1, \dots, n_k}|$  монотонно убывают по каждому из индексов, то расходимость по крайней мере одного из рядов

$$\sum_{n_v=1}^{\infty} n_v^{-1/2} E_{n_v, \infty}(f)_{L_2} \text{ влечет расходимость ряда (2) **}.$$

В теореме 1 «слабые» свойства функции по одним переменным компенсируются более сильными ее свойствами по другим. В связи с этим приведем другую теорему несколько иного характера.

**Теорема 2.** Пусть  $f(x_1, \dots, x_k) \in L_2$ . Тогда для сходимости ряда (2) достаточно, чтобы при любом  $v = 1, 2, \dots, k$  выполнялись условия

$$\sum_{n_v=1}^{\infty} n_v^{k/2-1} E_{n_v, \infty}(f)_{L_2} < \infty. \quad (3)$$

Как показывает следующее утверждение, условия (3) в теореме 2 являются в известном смысле окончательными.

**Теорема 3.** Пусть  $\{\alpha_n\}$  — произвольная монотонно убывающая последовательность чисел и  $\alpha_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k/2-1} \alpha_n = \infty,$$

то можно указать непрерывную периодическую по каждой из переменных функцию  $f(x_1, \dots, x_k)$ , у которой

$$E_{n_v, \infty} f = O(\alpha_n) \quad (v = 1, 2, \dots, k; n_v = n),$$

а ряд (2) будет расходящимся.

При  $k = 1$  эта теорема доказана С. Н. Бернштейном (<sup>(1)</sup>, стр. 166).

Теоремы 1 и 2 показывают, какие конструктивные свойства функции по каждой из переменных в отдельности обеспечивают абсолютную сходимость ее ряда Фурье. Следующие два предложения, соответственно эквивалентные теоремам 1 и 2, выражают эти свойства в структурных терминах \*\*\*.

\* При  $k = 1$ , т. е. для функции одной переменной, это следует из неравенства (см. <sup>(18)</sup>, стр. 303)  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \leq A \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} \left( \sum_n c_n^2 \right)^{1/2}$ .

\*\* При  $k = 1$  это утверждение доказано С. Б. Стечкиным (<sup>(4)</sup>).

\*\*\* При  $k = 1$  см. <sup>(3)</sup>.

Теорема 4. Сходимость рядов

$$\sum_{n_v=1}^{\infty} n_v^{-1/2} \omega_{r_v}^{\alpha_v} \left( f; \frac{1}{n_v} \right)_{L_2} \quad \left( v = 1, 2, \dots, k; r_v > \frac{1}{2\alpha_v} \right) \quad (4)$$

для некоторых  $\alpha_v > 0$ ,  $\sum_{v=1}^k \alpha_v = 1$ , обеспечивает абсолютную сходимость ряда Фурье функции  $f(x_1, \dots, x_k)$ .

Теорема 5. Если для функции  $f(x_1, \dots, x_k) \in L_2$  выполнены условия

$$\sum_{n_v=1}^{\infty} n_v^{k/2-1} \omega_k \left( f; \frac{1}{n_v} \right)_{L_2} < \infty \quad (v = 1, 2, \dots, k), \quad (5)$$

то ряд (2) сходится.

Так как в теореме 4 лишь одно из  $\alpha_v$  может оказаться больше  $1/2$ , а все остальные  $\alpha_v$ , следовательно, меньше  $1/2$ , то абсолютная сходимость кратного ряда Фурье связана в основном ( $r_v > 1/2\alpha_v$ ) с характером убывания модулей гладкости функции по каждой из ее переменных. Это же подтверждается и теоремой 5. В то же самое время для функций одной переменной достаточно рассматривать лишь их модули непрерывности.

В заключение приведем некоторые из возможных обобщений теорем 1 и 2.

Теорема 6\*. Пусть периодическая периода  $2\pi$  по каждой из переменных функция  $f(x_1, \dots, x_k) \in L_2$ ;  $\Phi(t)$  — возрастающая вогнутая функция и  $\Phi(0) = 0$ . Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{i_1=1}^{\infty} \dots \sum_{i_k=1}^{\infty} \Phi \{ |c_{n_1, i_1} \dots c_{n_k, i_k}|^2 \} \leq A \sum_{v=1}^k \sum_{i_v=1}^{\infty} \Phi \left\{ \frac{E_{n_v, i_v}^{2\alpha_v} (f)_{L_2}}{i_v} \right\},$$

где  $c_{n_1, \dots, n_k}$  — коэффициенты Фурье функции  $f(x_1, \dots, x_k)$ ,  $\{n_v, i_v\}$  ( $v = 1, 2, \dots, k$ ) — возрастающие последовательности целых чисел  $\alpha_v > 0$  ( $v = 1, 2, \dots, k$ ),  $\sum_{v=1}^k \alpha_v = 1$ .

Теорема 7\*\*. Пусть  $f(x_1, \dots, x_k) \in L_p$ ,  $1 < p \leq 2$ . Если для некоторой системы чисел  $\alpha_v > 0$  ( $v = 1, 2, \dots, k$ ),  $\sum_{v=1}^k \alpha_v = 1$ , при любом  $v = 1, 2, \dots, k$  выполнены условия

$$\sum_{n_v=1}^{\infty} n_v^{\delta_v - \beta(p-1)/p} E_{n_v, \infty}^{\beta\alpha_v} (f)_{L_p} < \infty,$$

или, что эквивалентно,

$$\sum_{n_v=1}^{\infty} n_v^{\delta_v - \beta(p-1)/p} \omega_{r_v}^{\beta\alpha_v} \left( f; \frac{1}{n_v} \right)_{L_p} < \infty,$$

где  $r_v > \frac{p-1}{p\alpha_v}$  ( $r_v$  — целые числа),  $0 \leq \delta_v < \beta(p-1)/p$  ( $v = 1, 2, \dots, k$ ),  $0 < \beta < \frac{p}{p-1}$ , то

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \dots \sum_{-\infty}^{\infty} |c_{n_1, \dots, n_k}|^{\beta} (|n_1| + 1)^{\delta_1} \dots (|n_k| + 1)^{\delta_k} < \infty.$$

\* При  $k = 1$  см. (3).

\*\* При  $k = 1$  см. (7).

Теорема 8. Если  $f(x_1, \dots, x_k) \in L_p$ ,  $1 < p \leq 2$ , и

$$\sum_{n_v=1}^{\infty} \omega_k^{\beta} \left( f; \frac{1}{n_v} \right)_{L_p} n_v^{k(1-\beta(p-1)/p)-1} < \infty \quad (v = 1, 2, \dots, k),$$

где  $0 < \beta < \frac{p}{p-1}$ , то ряд

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \dots \sum_{-\infty}^{\infty} |c_{n_1, \dots, n_k}|^{\beta}$$

сходится.

Днепропетровский сельскохозяйственный институт

Поступило  
16 XI 1960

# ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> С. Н. Бернштейн, Собр. соч., 2, 1954. <sup>2</sup> А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1939. <sup>3</sup> С. Б. Стечкин, Матем. сборн., 29, № 1, 225 (1951). <sup>4</sup> С. Б. Стечкин, ДАН, 102, № 1, 37 (1955). <sup>5</sup> С. Б. Стечкин, Изв. АН СССР, сер. матем., 17, № 2, 37 (1953). <sup>6</sup> С. Б. Стечкин, Изв. АН СССР, сер. матем., 19, № 4, 221 (1955). <sup>7</sup> А. А. Конюшков, Матем. сборн., 44, № 1, 53 (1958). <sup>8</sup> В. Г. Челидзе, ДАН, 54, № 2 (1946). <sup>9</sup> В. Г. Челидзе, Тр. Тбилисск. матем. инст., 26, 75 (1959). <sup>10</sup> И. Е. Жак, Сообщ. АН ГрузССР, 12, № 3, 129 (1951). <sup>11</sup> G. E. Reyes, O. Szász, Duke Math. J., 9, 693 (1942). <sup>12</sup> S. Minakshisundaram, O. Szász, Trans. Am. Math. Soc., 61, 36 (1947). <sup>13</sup> J. Musielak, Bull. Acad. Polon. Sci., cl. 3, 5, 251 (1957). <sup>14</sup> J. Musielak, Ann. Polon. Math., 5, № 2 (1958). <sup>15</sup> Се Тин-фань, Acta Math. Sinica, 9, № 2 (1959). <sup>16</sup> И. Е. Жак, М. Ф. Тиман, Матем. сборн., 35, № 1, 21 (1954). <sup>17</sup> И. Е. Жак, Сообщ. АН ГрузССР, 16, № 2, 185 (1955). <sup>18</sup> Г. Г. Харди, Д. Е. Литтлвуд, Г. Полиа, Неравенства, ИЛ, 1948.

# КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Э. И. НЕЧИПОРУК

## О СИНТЕЗЕ $\mathfrak{X}$ -СХЕМ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 31 VIII 1960)

Аналогия между булевыми структурами, с одной стороны, и булевыми кольцами, с другой, позволяет определить схемы, подобные контактно-вентильным схемам, в которых проводимость цепи вычисляется таким же путем, как и в контактно-вентильных схемах, а проводимость схемы — с использованием сложения по mod 2 вместо булевского сложения. Для корректности определения необходимо также, чтобы все ребра схем были ориентированными и в схеме не содержалось петель, имеющих ненулевую проводимость. Назовем такие объекты  $\mathfrak{X}$ -схемами.



Рис. 1

В настоящей работе рассматривается метод синтеза  $\mathfrak{X}$ -схем, доставляющий схемы с асимптотически наименьшим числом контактов.

Пусть  $H$  — неориентированный граф без петель <sup>(1)</sup>, каждой паре ребер которого инцидентны более двух узлов. Пусть он имеет узлы  $P_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, m$ , и  $N$  ребер, и пусть  $(\alpha_1, \alpha_2)$  — отношение инцидентности узлов в  $H$ . Пусть далее  $\{h_\beta\}$ ,  $\beta = 1, \dots, N$ , — система попарно ортогональных булевских функций. Сопоставим взаимно-однозначно ребрам  $(P_{\alpha_1}, P_{\alpha_2})$  функции  $h_{\beta_{\alpha_1, \alpha_2}}$  ( $1 \leq \beta_{\alpha_1, \alpha_2} \leq N$ ) и положим  $g_\alpha = \bigvee_{(\alpha, \alpha')=1} h_{\beta_{\alpha, \alpha'}}$ . Функцию  $g_\alpha$  назовем

связанной с узлом  $P_\alpha$ .

Лемма 1.

$$g_{\alpha_1} g_{\alpha_2} = \begin{cases} 0, & \text{если } (\alpha_1, \alpha_2) = 0, \\ h_{\beta_{\alpha_1, \alpha_2}}, & \text{если } (\alpha_1, \alpha_2) = 1. \end{cases}$$

Обозначим  $\tilde{L}_{\mathfrak{X}}(n)$  минимальное число такое, что  $\mathfrak{X}$ -схемами, имеющими не более  $\tilde{L}_{\mathfrak{X}}(n)$  контактов, можно реализовать любую функцию алгебры логики  $n$  аргументов;  $\tilde{L}(n)$  — соответствующее число для контактно-вентильных схем.

Лемма 2.

$$2^{n/2} \lesssim \tilde{L}(n) \lesssim 2 \cdot 2^{n/2}. \quad (1)$$

Доказательство. Нижняя оценка. Вместо каждого контакта  $x$  схемы производится подстановка схемы, изображенной на рис. 1. Полученная схема эквивалентна исходной, но в ней все цепи проходят через контакты в одном направлении; один конец контакта является входным, другой выходным. Проводимость схемы из  $L$  контактов (один из которых является «источниковым») однозначно определяется наименованиями контактов и квадратной матрицей  $B\{b_{i,j}\}_1^L$ ,  $b_{i,j} = 1$ , тогда и только тогда, когда имеется цепь, проходящая через вентили, от выхода  $i$ -го контакта к входу  $j$ -го контакта.

Верхняя оценка. При  $n$  четном верхняя оценка следует из <sup>(2, 3)</sup>. Пусть  $n = 2k + 1$ . Аргументы разбиваются на группы:  $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ ;  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$  содержат по  $k - t$  букв,  $\tilde{x}_3$  содержит  $2t + 1$  букв. В качестве множества

$\{h_\beta\}$  (лемма 1) берется множество всех конъюнкций  $K_{\sigma_\delta}(\tilde{x}_3)^*$ . Пусть граф  $H$  имеет  $2T$  узлов,  $T = [2^{(2t+1)/2}] + 1$ , распадающихся на две группы по  $T$  узлов. Ребра имеются только между узлами из разных групп; всего имеется  $2^{2t+1}$  ребер. Пусть  $\{g_{\gamma, \delta}\}$  — множество функций, связанных с узлами  $\delta$ -й группы графа  $H$  ( $\delta = 1, 2; 1 \leq \gamma \leq T$ ), и  $\tilde{\sigma}_3(\gamma_1, \gamma_2)$  — такой набор, что  $K_{\tilde{\sigma}_3(\gamma_1, \gamma_2)} = g_{\gamma_1, 1} g_{\gamma_2, 2}$ . Тогда

$$f(\tilde{x}) = \bigvee_{\gamma_1, \gamma_2, \sigma_1, \sigma_2} g_{\gamma_1, 1}(\tilde{x}_3) K_{\sigma_1}(\tilde{x}_1) g_{\gamma_2, 2}(\tilde{x}_3) K_{\sigma_2}(\tilde{x}_2) f(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3(\gamma_1, \gamma_2)). \quad (2)$$

Схема (см. рис. 2) строится из двух контактных схем  $S^1$  и  $S^2$  и вентильной схемы, соединяющей в соответствии с (2) выходы схемы  $S^1$  со входами схемы  $S^2$ . Схема  $S^\delta$  ( $\delta = 1, 2$ ) реализует функции  $g_{\gamma_\delta, \delta}(\tilde{x}_3) \& K_{\sigma_\delta}(\tilde{x}_\delta)$  и состоит из схемы  $G^\delta$  над  $\tilde{x}_3$ , реализующей функции  $g_{\gamma_\delta, \delta}$  (полученной из контактного дерева) и  $T$  схем  $K^\delta$ , реализующих каждая все конъюнкции  $K_{\sigma_\delta}(\tilde{x}_\delta)$  (асимптотически по  $2^{k-t}$  контактов (3)). Положим  $t, k \rightarrow \infty$ .

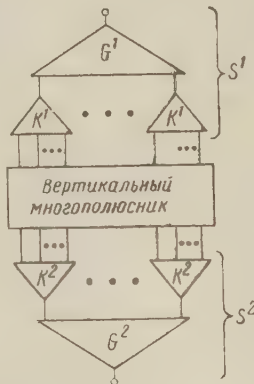


Рис. 2

Замечание. Если в схеме не существует петель, проходящих более чем через один контакт, то нижняя оценка в (1) повышается до  $\sqrt{2} \cdot 2^{n/2}$  (в этом случае при соответствующей нумерации контактов матрица  $B$  будет треугольной).

Теорема.

$$\tilde{L}_{\text{ж}}(n) \sim \sqrt{2} \cdot 2^{n/2}.$$

Доказательство. Нижняя оценка следует из замечания. Верхняя оценка (и метод синтеза). Пусть  $n$  четное,  $n = 2kr + 2s$ . Опишем одно специальное представление функции.

1) Аргументы разбиваются на группы:  $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{2k}, \tilde{y}^+, \tilde{y}^-)$ ;  $\tilde{x}_i = (x_i^1, \dots, x_i^r)$ ,  $i = 1, \dots, 2k$ ;  $\tilde{y}^+, \tilde{y}^-$  содержат по  $s$  букв. В множестве ненулевых наборов значений аргументов  $\tilde{x}_i$  выделяется система  $\{S_{i,j}\}$ ,  $j = 1, \dots, m = \lfloor \frac{2^r - 1}{r} \rfloor$  непересекающихся групп по  $r$  наборов в каждой группе так, что все наборы одной группы линейно независимы (4). Характеристические функции множеств  $S_{i,j}$  будем обозначать  $S_{i,j}$ . Оставшиеся наборы, включая нулевой, обозначим  $\tilde{\tau}_t$ ,  $t = 1, \dots, d$ ;  $d \leq r$ . Характеристическую функцию множества  $\{\tilde{\tau}_t\}$  наборов значений аргументов  $\tilde{x}_i$  обозначим  $T_i$ .

2) Пусть  $V_{\tilde{\pi}} = \bigwedge_{i=1}^{2k} S_{i,j_i}$ ,  $\tilde{\pi} = (j_1, \dots, j_{2k})$ ,  $j_i = 1, \dots, m$ . Из леммы 2 в (4) следует, что для каждой функции  $\varphi(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{2k})$ , удовлетворяющей условию  $\varphi(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{2k}) V_{\tilde{\pi}} = \varphi(x_1, \dots, x_{2k})$  найдется полином Жегалкина (5)\*\*

$$G[\varphi] = \bigvee_{\tilde{\rho}} u[\varphi; \tilde{\rho}] x_1^{r_1} \dots x_{2k}^{r_{2k}}, \quad \tilde{\rho} = (r_1, \dots, r_{2k}), \quad 1 \leq r_i \leq r, \quad u[\varphi; \tilde{\rho}] = 0, 1. \quad (3)$$

\*  $K_{\tilde{\sigma}}(\tilde{y})$  обозначает  $(y^1)^{\sigma^1} \dots (y^n)^{\sigma^n}$ , где  $\tilde{y} = (y^1, \dots, y^n)$ ,  $\tilde{\sigma} = (\sigma^1, \dots, \sigma^n)$  и  $(y)^\sigma$  есть  $y$  при  $\sigma = 1$  и  $\bar{y}$  при  $\sigma = 0$ .  
 \*\*  $\Sigma, \oplus$  означают сложение по mod 2.

такой что

$$\varphi(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{2k}) = V_{\pi} G[\varphi]. \quad (4)$$

3) Рассмотрим в качестве множества функций  $\{h_{\beta}\}$  (лемма 1) множество всех  $m^{2k}$  функций  $V_{\pi}$ . Пусть граф  $H$  имеет  $2k$  групп узлов по  $T = [\sqrt{2m^k} / \sqrt{2k(2k-1)}] + 1$  узлов в каждой группе, ребра имеются только между узлами из разных групп; всего имеется  $m^{2k}$  ребер. Обозначим  $W_{p,q}$  функцию, связанную с  $q$ -м узлом  $p$ -й группы, и пусть  $V_{p,q,p',q'} = W_{p,q} W_{p',q'}$  ( $V_{p,q,p',q'}$  есть либо  $V_{\pi}$  для некоторого  $\pi$ , либо 0);

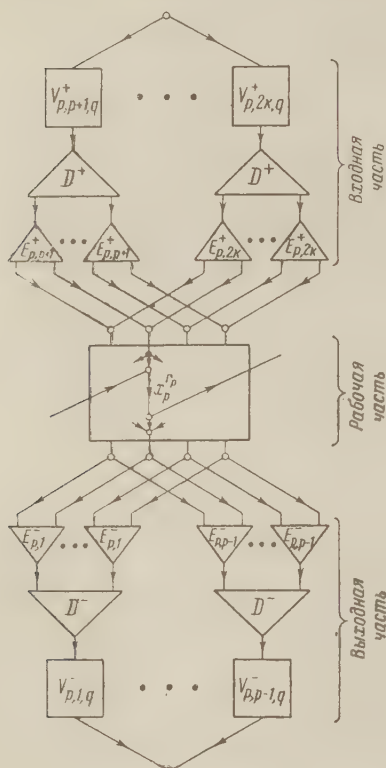


Рис. 3

5) В силу (3) — (5) функция  $f(\tilde{x})$  может быть представлена в виде

$$f(\tilde{x}) = f^{(1)}(\tilde{x}) \oplus f^{(2)}(\tilde{x});$$

$$f^{(1)}(\tilde{x}) K_{\sigma_t}(\tilde{x}_t) f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{t-1}, \tilde{\tau}_t, \tilde{x}_{t+1}, \dots, \tilde{x}_{2k}, \tilde{y}^+, \tilde{y}^-) \overset{u=1}{\&} T_u(\tilde{x}_u),$$

$$f^{(2)}(\tilde{x}) = \sum_{\substack{p,p',q,q' \\ p' > p \\ \sigma^+, \sigma^-, \tilde{p}}} (U_{p,q,\tilde{p}}^+ K_{\sigma^+}(\tilde{y}^+) x_p^r) (U_{p',q',\tilde{p}}^- K_{\sigma^-}(\tilde{y}^-) x_{p'}^{r'}) \times \\ \times u [f(\tilde{x}) V_{p,q,p',q'} K_{\sigma^+} K_{\sigma^-}; \tilde{p}]. \quad (6)$$

Схема для функции  $f$  образуется при параллельном соединении схем для  $f^{(1)}$  и для  $f^{(2)}$ . Последняя строится из блоков  $A_{p,q}$ , которые соединены параллельно и, кроме того, связаны между собой вентилями.

Блок  $A_{p,q}$  (см. рис. 3) состоит из отдельных подблоков. Подблоки  $V_{p,p',q}^+$ ,  $p' > p$ , и  $V_{p,p',q}^-$ ,  $p' < p$ , реализуют функции  $V_{p,p',q}^+$ ,  $V_{p,p',q}^-$ . Все подблоки  $V_{p,p',q}^+$ ,  $V_{p,p',q}^-$  (блока  $A_{p,q}$ ) содержат вместе не более  $2kr^2(2k-1)T$

контактов. С выходом (входом) каждого подблока  $V_{p,p',q}^+$  ( $V_{p,p',q}^-$ ) соединяется вход (выход) подблока  $D^+$  ( $D^-$ ) — дихотомического дерева над  $\tilde{y}^+$  ( $\tilde{y}^-$ ). Выходы (входы) подблоков  $D^+$  ( $D^-$ ) назовем одноименными, если проводимости между ними и входами (выходами) подблоков  $D^+$  ( $D^-$ ) равны. С выходами (входами) подблоков  $D^+$  ( $D^-$ ), соединенных с подблоками  $V_{p,p',q}^+$  ( $V_{p,p',q}^-$ ), соединяются входы (выходы) подблоков  $E_{p,p'}^+$  ( $E_{p,p'}^-$ ). Подблок  $E_{p,p'}^+$  ( $E_{p,p'}^-$ ) является  $(k-1)$ -ярусным  $r$ -хотомическим деревом, в котором контакты  $i'$ -го яруса, выходящие из одного узла (входящие в узел), именованы всеми различными переменными  $i'$ -й группы поднабора  $\mathfrak{M}_{p,p'}^+$  ( $\mathfrak{M}_{p,p'}^-$ ). Подблок  $E_{p,p'}^+$  ( $E_{p,p'}^-$ ) реализует функции  $E_{p,p',\tilde{p}}^+$  ( $E_{p,p',\tilde{p}}^-$ ), имеет  $r^{k-1}$  выходов (входов) и содержит  $\frac{r^k-r}{r-1}$  контактов. Вы-

ходы (входы) всех подблоков  $E_{p,p'}^+$  ( $E_{p,p'}^-$ ), соединенных с одноименными выходами (входами) подблоков  $D^+$  ( $D^-$ ), соответствующие одному набору  $\tilde{p}$  (по одному выходу (входу) от каждого подблока), соединяются в  $r^{k-1}$  узлов. Узлы, полученные от подблоков  $E_{p,p'}^+$  ( $E_{p,p'}^-$ ), назовем выходными (входными) узлами. Имеется всего  $2^s r^{k-1}$  входных и выходных узлов. Между соответствующими выходными и входными узлами вставляется подблок  $X_p$  (рис. 4); всего имеется  $2^s r^{k-1}$  подблоков  $X_p$ . Входной (выходной) конец каждого контакта из  $X_p$  назовем входным (выходным) рабочим полюсом блока  $A_{p,q}$ . Часть блока  $A_{p,q}$ , образованную подблоками  $V_{p,p',q}^+$ ,  $D^+$ ,  $E_{p,p'}^+$  ( $V_{p,p',q}^-$ ,  $D^-$ ,  $E_{p,p'}^-$ ), назовем входной (выходной), а часть, образованную подблоками  $X_p$  — рабочей. Проводимость блока  $A_{p,q}$  равна 0. Блок  $A_{p,q}$  имеет всего  $2^s r^k$  входных и столько же выходных рабочих полюсов и содержит не более

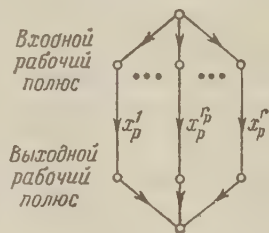


Рис. 4

$$R = 2kr^2(2k-1)T + (2k-1)(2^{s+1}-2) + \frac{r^k-r}{r-1}2^s(2k-1) + 2^s r^k$$

контактов.

При построении схемы для  $f^{(2)}$  некоторые пары  $(a, b)$  рабочих полюсов будут соединяться вентилями от  $a$  к  $b$  ( $a$  — выходной рабочий полюс из  $A_{p,q}$ ,  $b$  — входной рабочий полюс из  $A_{p',q'}$ ,  $p' > p$ ).

Последовательный процесс добавления вентилях между блоками  $A_{p,q}$  и  $A_{p',q'}$  с  $p' - p = 1, 2, \dots, 2k-1$  приводит к схеме для  $f^{(2)}$ .

Общее число контактов в схеме для  $f$  не превосходит

$$L = 2kTR + 2Ckr2^{(n-r)/2} + 2kr^2.$$

Положим  $k = \lceil \lg_2 n \rceil$ ,  $r = \lceil 1/8n / \lg_2 n \rceil$ ,  $s = n/2 - kr$ . Тогда  $L \lesssim \sqrt{2} \cdot 2^{n/2}$ .

При  $n = 2kr + 2s + 1$  подблоки  $D^+$ ,  $D^-$  строятся так же, как части схемы рис. 2, расположенные выше и ниже вентильной схемы (см. лемму 2). Число выходов (входов) схем  $D^+$  ( $D^-$ ) асимптотически равно  $2^{(2s+1)/2}$ , схемы  $D^+$ ,  $D^-$  содержат асимптотически по  $2^{(2s+1)/2}$  контактов.

Теорема доказана.

Поступило  
26 VIII 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> А. В. Кузнецов, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **51**, 186 (1958). <sup>2</sup> О. Б. Лупанов, ДАН, **111**, № 6, 1171 (1956). <sup>3</sup> О. Б. Лупанов, ДАН, **119**, № 1, 23 (1958). <sup>4</sup> Э. И. Нечипорук, ДАН, **136**, № 3 (1961). <sup>5</sup> И. И. Жегалкин, Матем. сборн., **35**, № 3—4, 311 (1928).

Г. Л. ГРОДЗОВСКИЙ, Ю. Н. ИВАНОВ и В. В. ТОКАРЕВ

# О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ С ПОСТОЯННОЙ ЗАТРАТОЙ МОЩНОСТИ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 1 VIII 1960)

В настоящей работе исследован общий случай оптимизации реактивного движения тела переменной массы в гравитационном поле двух центров при постоянной затрате мощности  $N = \text{const}$  и рассмотрена соответствующая вариационная задача.

1. При заданной траектории движения ускорение от реактивной тяги является заданным  $a = a(t) = -\frac{V}{m} \frac{dm}{dt}$ , где  $V$  — скорость выброса рабочего тела, а полезная реактивная мощность записывается в виде  $N = -\frac{dm}{dt} \frac{V^2}{2}$ ; отсюда получаем

$$\frac{a^2}{2N} = -\frac{1}{m^2} \frac{dm}{dt}. \quad (1)$$

Интегрируя уравнение (1), приходим к следующему закону изменения веса тела по времени  $t$ :

$$G = G_0 \left( 1 + \frac{G_0}{2Ng} \int_0^T a^2 dt \right), \quad (2)$$

где  $g$  — земное ускорение силы тяжести,  $G_0$  — начальный вес.

Обозначим удельный вес источника мощности  $\alpha = G_N / N$ . Относительный суммарный начальный вес запаса выбрасываемой массы  $G_M$  и источника мощности  $G_N$  будет равен:

$$\bar{G} = \frac{G_M + G_N}{G_0} = \alpha \frac{N}{G_0} + 1 = 1 + \left( 1 + \frac{G_0}{2Ng} \int_0^T a^2 dt \right). \quad (3)$$

При заданной функции  $a(t)$  величина  $\bar{G}$  имеет минимум  $\bar{G}_{\min} = 2 \sqrt{\Phi} - \Phi$  при  $(G_N/G_0)_{\text{опт}} = (\alpha N/G_0)_{\text{опт}} = 1 - \sqrt{\Phi} - \Phi$ , где  $\Phi = \frac{\alpha}{2g} \int_0^T a^2 dt$ .

В случае многоступенчатого уменьшения мощности с соответствующим уменьшением веса максимальный относительный полезный вес выражается формулой

$$\bar{G}_{\text{п. макс}} = (1 + \Phi_1 - 2 \sqrt{\Phi_1}) \prod_{i=2}^n \left( \frac{1 - \Phi_i}{1 + \Phi_i} \right)^2, \quad (4)$$

где  $\sum_{i=1}^n \Phi_i = \Phi$  задано. Оптимальное соотношение между  $\Phi_i$  можно получить дифференцируя (4).

Изменение  $\bar{G}_{\min}$  и  $G_N/G_0$  в зависимости от  $\Phi$  приведено на рис. 1.

2. Из п. 1 следует, что минимум  $\bar{G}$  требует минимума интеграла.

$\int_0^T a^2 dt$ . В качестве приложения рассмотрим простейшее плоское движение по пологой спирали в центральном гравитационном поле при малых значениях  $a$ .

Уравнение движения в полярных координатах  $r, \psi$  пишем в виде

$$a_r = \ddot{r} - \frac{v_\psi^2}{r} + \frac{g_0 R_0^2}{r^2},$$

$$a_\psi = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(rv_\psi), \quad v_r = \dot{r}, \quad v_\psi = r\dot{\psi}, \quad (5)$$

где  $g_0$  — ускорение силы тяжести на радиусе  $R_0$ .

Для реализации спирального движения положим  $\dot{a}_\psi = k(t)g_0$ ,  $a_r = v_r^*$ ; тогда

$$v_\psi = R_0 \sqrt{g_0/r}, \quad k(t) = -R_0^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{rv_\psi} \right).$$

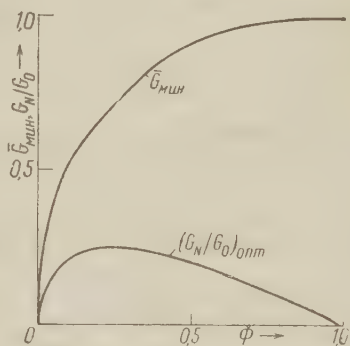


Рис. 1

После интегрирования, считая при  $t=0$   $r=R_0$ ,  $v_\psi=v_0=\sqrt{g_0 R_0}$ , получаем следующий закон спирального движения:

$$\frac{r}{R_0} = \left[ 1 - \frac{\int_0^t k(t) dt}{R_0/v_0} \right]^2. \quad (6)$$

Отметим, что в этом движении переход с заданного радиуса  $R_0$  на заданный радиус  $R_1$  за заданное время определяется интегралом

$$\int_0^T k(t) dt.$$

Для обеспечения при этом минимума  $\bar{G}$  требуется минимум интеграла  $\int_0^T k^2(t) dt$ . Согласно нера-

$$\text{венству Коши — Буняковского } T \int_0^T k^2(t) dt \geq \left[ \int_0^T k(t) dt \right]^2,$$

поэтому в рассматриваемом спиральном движении минимум  $\bar{G}$  достигается при  $k(t) \equiv \text{const}$ .

3. Рассмотрим задачу об оптимальном перемещении тела переменной массы за время  $T$  между двумя заданными точками (с заданными скоростями) при минимуме  $\bar{G}$ . Это приводит к вариационной задаче об отыскании экстремалей интеграла  $I = \int_0^T a^2(t) dt$  в классе непрерывных функций  $a(t)$ .

Рассмотрим плоское движение в поле тяготения двух гравитирующих центров, один из которых покоится, а второй вращается вокруг него с угловой скоростью  $\omega$  по окружности радиуса  $r_0$ . Для изучения характера движения в области преобладающего влияния одного из центров целесообразен выбор системы координат, связанной с этим центром (см. рис. 2). Уравнения движения в выбранных системах координат можно

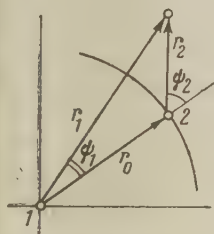


Рис. 2

\* Можно показать, что при этом  $a_r$  порядка  $ka_\psi$ , т. е. при малых  $k$  и полной энергии движения, не близкой к нулю, радиальная составляющая незначительна.

записать в единой форме:

$$\ddot{r}_i - r_i (\dot{\psi}_i + \omega)^2 = a_{r_i} - \frac{k_i}{r_i^2} - \mathfrak{R}_i; \quad (7)$$

$$r_i \ddot{\psi}_i + 2\dot{r}_i (\dot{\psi}_i + \omega) = a_{\psi_i} - \Psi_i, \quad i=1,2, \quad (8)$$

где  $\mathfrak{R}_1 = \frac{k_2}{r_0^2} \cos \psi_1 - \frac{k_2}{r_2^2} \cos (\psi_1 - \psi_2)$ ,  $\mathfrak{R}_2 = \frac{k_1}{r_1^2} \cos (\psi_1 - \psi_2)$ ,  $\Psi_1 = \frac{k_2}{r_0^2} \sin \psi_1 + \frac{k_2}{r_2^2} \sin (\psi_1 - \psi_2)$ ,  $\Psi_2 = \frac{k_1}{r_1^2} \sin (\psi_1 - \psi_2)$ ,  $k_1$  и  $k_2$  — постоянные тяготения.

Требуется найти траектории  $r(t)$  и  $\psi(t)$ , которые обращали бы в минимум интеграл

$$I = \int_0^T \left\{ \left[ \ddot{r}_i - r_i (\dot{\psi}_i + \omega)^2 + \frac{k_i}{r_i^2} - \mathfrak{R}_i \right]^2 + [r_i \ddot{\psi}_i + 2\dot{r}_i (\dot{\psi}_i + \omega) \Psi_i]^2 \right\} dt. \quad (9)$$

Уравнения Эйлера этой вариационной задачи представим в виде

$$\dot{a}_{r_i} = \frac{1}{v_{r_i}} \left[ \frac{a_{r_i}^2 + a_{\psi_i}^2}{2} + a_{r_i} \left( \frac{v_{\psi_i}^2}{r_i} - \frac{k_i}{r_i^2} \right) - \lambda_i - v_i \frac{v_{\psi_i}}{r_i} \right], \quad (10)$$

$$\dot{a}_{\psi_i} = \frac{1}{r_i} (a_{\psi_i} v_{r_i} - 2a_{r_i} v_{\psi_i} + v_i); \quad (11)$$

$$\dot{v}_i = a_{\psi_i} \Psi'_{i\psi_i} + a_{r_i} \mathfrak{R}'_i \psi_i; \quad (12)$$

$$\dot{\lambda}_i = -v_{r_i} \left( a_{\psi_i} \Psi'_{ir_i} + a_{r_i} \mathfrak{R}'_{ir_i} + \frac{\Psi_i}{r_i} a_{\psi_i} \right) - v_i \frac{\Psi_i}{r_i} - \dot{a}_{r_i} \mathfrak{R}_i - \frac{v_{\psi_i}}{r_i} (v_i - 2a_{r_i} \Psi_i);$$

$$v_{r_i} = \dot{r}_i, \quad v_{\psi_i} = r_i (\dot{\psi}_i + \omega). \quad (14)$$

Происхождение функций  $v$  и  $\lambda$  выясним из рассмотрения движения в центральном поле ( $k_2 = 0$ ;  $\omega = 0$ ). При этом  $\mathfrak{R}_1 = 0$  и  $\Psi_1 = 0$ , т. е.  $\dot{v} = 0$  и  $\dot{\lambda} = 0$ ;  $v \equiv \text{const}$  и  $\lambda \equiv \text{const}$  являются интегралами системы. Упростим уравнения движения (7), заменив дифференцирование по времени дифференцированием по радиусу:

$$v'_r v_r - (v_\psi^2 / r - k / r^2) = a_r, \quad v'_\psi v_r + v_r v_\psi / r = a_\psi,$$

и рассмотрим следующую вариационную задачу: найти траекторию,

обеспечивающую  $\min \int_{r_1}^{r_2} a^2 \frac{dr}{v_r}$  при дополнительных условиях изопериметри-

ности: заданном времени перемещения от  $r_1$  до  $r_2$  ( $T = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{v_r}$ ) и заданном

полярном угле перемещения  $\Delta\psi = \int_{r_1}^{r_2} \frac{v_\psi}{r} \frac{dr}{v_r}$ , т. е. найдем экстремали интеграла

$$\int_{r_1}^{r_2} \left( \frac{a_r^2 + a_\psi^2}{v_r} + \frac{\kappa_1}{v_r} + \kappa_2 \frac{v_\psi}{r v_r} \right) dr. \quad (15)$$

После выполнения дифференцирования и обратного перехода к переменной  $t$  ( $dt = dr / v_r$ ) получаем выражения для  $\dot{a}_r$  и  $\dot{a}_\psi$ , совпадающие с (10) и (11) при  $\kappa = 2\lambda$  и  $\kappa_2 = 2v^*$ .

\* В работе (1), посвященной оптимальному программированию вектора тяги при движении в центральном поле с  $N \equiv \text{const}$  упущена константа  $v$ , что сужает класс возможных решений.

Таким образом, в центральном поле функции  $\lambda$  и  $\nu$  имеют смысл констант в условиях изопериметричности.

4. Итак, решение поставленной в п. 3 задачи сводится к совместному интегрированию двух систем уравнений (7) и (10) — (14).

В качестве примера рассмотрим движение в бессилом поле:  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 0$ . В этом случае уравнения (7), (10) — (14) в прямоугольной системе координат запишутся в виде

$$d^2\bar{r}/dt^2 = \bar{a}; \quad (16)$$

$$d^4\bar{r}/dt^4 = 0, \quad (17)$$

откуда

$$\bar{a} = \bar{b}_1 t + \bar{b}_2, \quad \bar{r} = 1/6 \bar{b}_1 t^3 + 1/2 \bar{b}_2 t^2 + \bar{b}_3 t + \bar{b}_4. \quad (18)$$

Векторы  $\bar{b}_1$ ,  $\bar{b}_2$ ,  $\bar{b}_3$  и  $\bar{b}_4$  определяются из граничных условий по заданным координатам и скоростям в двух точках и времени перемещения  $T$  между ними. Отметим, что в этом случае вдоль оптимальной траектории ускорение  $\bar{a}$  изменяется линейно по времени (см. (18)), а в плоском движении отношение компонент ускорения есть дробно-линейная функция времени, как и в работе (2), где исследован случай постоянной реактивной тяги.

5. Исследуем особенности полученной системы уравнений. Для простоты рассматриваем движение в центральном поле. Как видно из уравнения (10), при обращении радиальной скорости в нуль  $v_r = 0$   $a_r \rightarrow \infty$ , если числитель правой части этого уравнения не обращается также в нуль в этих точках. Исключив  $a_r$  из уравнений (7), приходим к уравнению, линейному относительно  $1/2 \dot{v}_r^2$ ; его решение запишется в виде

$$1/2 \dot{v}_r^2 = c v_r + v_r \int \frac{\dot{v}_r - 1/2 \dot{f}^2 + h}{v_r^2} dv_r, \quad (19)$$

где  $\dot{f} = v_\phi^2/r - k/r^2$ ,  $h = 1/2 a_\phi^2 - \lambda - \nu v_\phi/r$ , а  $c$  — постоянная интегрирования.

Подынтегральное выражение (19) можно разложить в точке  $v_r = 0$  по степеням  $v_r$ ; при этом производные  $d^h/dv_r^h$  будут конечны в случае конечности  $\dot{v}_r$ . Интегрируя это разложение и устремляя к нулю  $v_r$  найдем в случае конечности  $c$ :  $(1/2 \dot{v}_r^2)_{v_r=0} = (1/2 \dot{f}^2 - h)_{v_r=0}$ , или, заменяя  $\dot{f}$  и  $h$  их значениями и подставляя  $\dot{v}_r = a_r + \dot{f}$ , получим

$$1/2 a_r^2 + a_r \dot{f} + 1/2 \dot{f}^2 = 1/2 \dot{f}^2 - 1/2 a_\phi^2 + \lambda + \nu \dot{\phi}. \quad (20)$$

Видно, что условие конечности  $1/2 \dot{v}_r^2$ , а значит и  $a_r$  состоит в обращении в нуль числителя выражения  $\dot{a}_r$  в токе  $v_r = 0$ , а сама точка является особой, типа «узел».

В результате дифференцирования  $1/2 \dot{v}_r^2$  по  $v_r$  получим

$$\ddot{v}_r = c + \dot{f} + \int \frac{1}{v_r} \left[ \dot{f} - \frac{d}{dv_r} (1/2 \dot{f}^2 - h) \right] dv_r. \quad (21)$$

При  $v_r \rightarrow 0$  последний интеграл стремится к нулю (это можно доказать, разложив интеграл в окрестности точки  $v_r = 0$  и устремив  $v_r \rightarrow 0$ ). Отсюда определяется величина константы  $c$  — это значение  $a_r$  при  $v_r = 0$ .

Проведенное исследование позволяет использовать методы численного интегрирования для решения задачи в общем случае.

Центральный аэро-гидродинамический институт  
им. Н. Е. Жуковского

Поступило  
24 VII 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА:

<sup>1</sup> J. H. Irving, E. K. Blum, Vistas in Astronautics, 2, Second Annual Astronautics Symposium, 1959. <sup>2</sup> Д. Е. Охоцимский, Т. М. Эннеев, Усп. физ. наук, 58, в. 1а (1957).

М. Р. ФЕЛЬДМАН

# УСТОЙЧИВОСТЬ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН СТУПЕНЧАТО ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 2 XI 1960)

§ 1. В работе рассматривается задача о колебаниях ортотропной квадратной пластины при ступенчатом изменении ее толщины. При этом предполагается, что пластина подвержена действию продольных сжимающих сил  $T$ , приложенных в срединной плоскости по линиям  $x = a_\gamma$  (рис. 1 А).

Пусть одна из плоскостей упругой симметрии совпадает со срединной плоскостью пластины, а остальные две плоскости параллельны ее сторонам. Координатные оси  $ox$ ,  $oy$ , расположенные в срединной плоскости

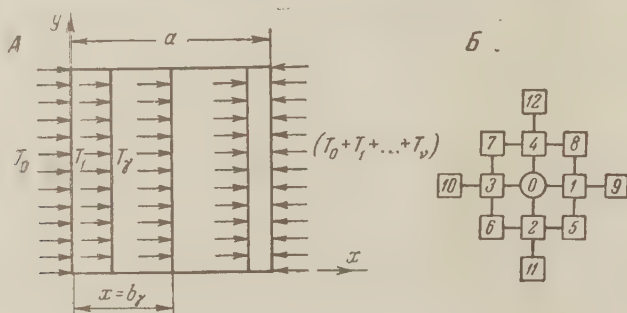


Рис. 1. Ортотропная пластинка ступенчато переменной жесткости и расположение смежных узлов решетки

пластины, совместим с главными направлениями упругости и направим вдоль свободно опертых краев пластины. Допустим, что силы зависят от одного параметра  $T_0: T_1 = \beta_1 T_0$ ,  $T_2 = \beta_2 T_0$ , ...,  $T_v = \beta_v T_0$ , где  $\beta_\gamma$  — известные числа ( $\gamma = 1, 2, \dots, v$ ),  $v$  — число участков пластины.

Для решения задачи применим синтез метода конечных разностей и метода Бубнова — Галеркина. Воспользуемся квадратной сеткой и разделим каждую сторону пластины на  $n$  равных частей. Шаг сетки  $\epsilon = a/n$ . Расположение смежных узлов решетки показано на рис. 1 Б.

Отклонения пластины  $u_0$  для решетки регулярной структуры на каждом ее участке удовлетворяют системе разностных уравнений

$$\begin{aligned} &2(3 + 3k_2 + 4k_3)u_0 - 4(k_2 + k_3)(u_2 + u_4) - 4(1 + k_3)(u_1 + u_3) + \\ &+ 2k_3(u_5 + u_6 + u_7 + u_8) + k_2(u_{11} + u_{12}) + u_9 + u_{10} = \\ &= \lambda \frac{P_v}{R_v}(2u_0 - u_1 - u_3) + Fu_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $P_v = (T_0 + T_1 + \dots + T_v)/T_0$ ;  $R_v = D_v/D_0$ ;  $\lambda = a^2 T_0 / D_0 n^2$ ;  $F = \rho p^2 a^4 / D_0 n^4$ ;  $k_2 = D_2/D_0$ ;  $k_3 = D_3/D_0$ ;  $D_0 = E_0 h^3 / 12(1 - \mu_1 \mu_2)$  — ци-

линдрическая жесткость первого участка для главного направления вдоль оси  $ox$ ,  $D_\gamma$  — то же для  $\gamma$ -го участка;  $D_2 = E_2 h^3 / 12(1 - \mu_1 \mu_2)$ ;  $D_3 = D_0 \mu_2 + 2D_k$ ;  $D_k = Gh^3 / 12$ ;  $p$  — частота колебаний;  $\rho$  — масса пластины на единицу срединной площади. Расстояние между двумя смежными линиями сетки примем равным  $\varepsilon = a/6$ .

Составив равенства (1) для всех внутренних узловых точек с учетом свободного опирания пластины по контуру, получим систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых отклонений  $u_0$ .

Уравнение срединной упругой поверхности, удовлетворяющее условиям свободного опирания на границах пластины, примем в виде (1)

$$u_0 = u(\xi, \eta) = C \sin \pi \xi \sin \pi \eta, \quad (2)$$

где  $\xi = x/a$  и  $\eta = y/a$  — безразмерные координаты. Выполнив действия в соответствии с работой (2), получим однородное линейное уравнение относительно параметров  $\lambda$  и  $F$ .

Зависимость между величиной частоты собственных колебаний  $p$  и продольными сжимающими силами  $T$  для квадратной пластины, сжатой ступенчатой нагрузкой по линиям  $\xi = 0$ ,  $\xi = 0,5$  и  $\xi = 1$ , имеет вид

$$p^2 = \frac{9,65 (R_1 + P_1)}{\rho a^2 (R_1 + 1)} \left[ \frac{19,34 (1 + k_2 + 2k_3) D_1}{a^2 (R_1 + P_1)} - T \right]. \quad (3)$$

Зная величину сжимающих сил  $T$ , находим частоту колебаний пластины.

Принимая в уравнении (3)  $T = 0$ , получим основную собственную частоту колебаний  $p = \frac{13,7}{a^2} \sqrt{\frac{(1 + k_2 + 2k_3) D_1}{\rho (1 + R_1)}}$ .

Критическую нагрузку представим в виде

$$T_{кр} = VD_v / a_{пр}^2, \quad (4)$$

где  $V$  — константа, характеризующая  $T_{кр}$  для пластины постоянной толщины, сжатой по контуру в одном направлении;  $a_{пр} = \alpha a$  — приведенная сторона пластины;  $\alpha$  — коэффициент, зависящий от способа нагружения и контурных условий пластины. Таким образом, в силу формулы (4), задача сводится к нахождению значений  $\alpha$  для различных отношений  $P_v$  и  $R_v$ .

Принимая  $\lambda P_v / R_v = V / \alpha^2$ , имеем

$$(T_0 + T_1)_{кр} = VD_1 / a_{пр}^2. \quad (5)$$

Полагая в уравнении (3)  $p = 0$ , получим минимальное значение критической силы

$$(T_0 + T_1)_{кр} = 9,67 (1 + k_2 + 2k_3) D_1 / a_{пр}^2. \quad (6)$$

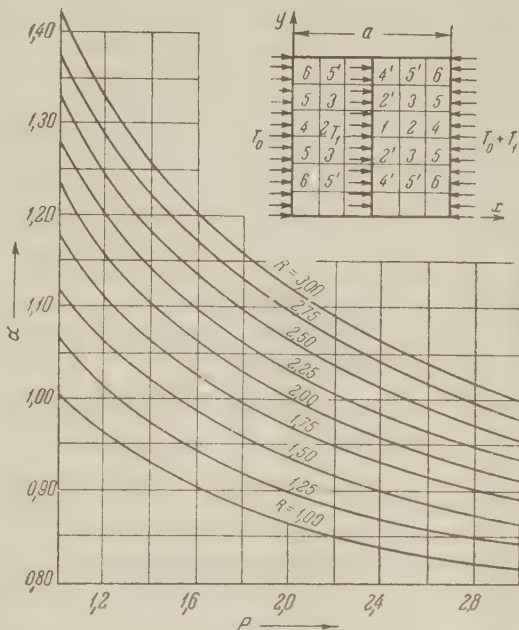


Рис. 2. Графики значений коэффициентов длины

для квадратной пластины, сжатой ступенчатой нагрузкой по линиям  $\xi = 0$ ,  $\xi = 0,5$  и  $\xi = 1$ , имеет вид

Задаваясь различными отношениями  $P$ , и  $R$ , получим значения  $\alpha$  для любого фиксированного случая загрузки пластины. На рис. 2 приведены значения коэффициентов длины  $\alpha$  для случая  $b/a = 0,5$ .

Этим же методом могут быть исследованы неоднородные пластины, для которых  $E = E(\xi, \eta)$ .

§ 2. Для учета влияния реологических свойств материала на величину критической силы ортотропной пластины применим принцип Вольтерра — Работнова (3). Введем три интегральных временных оператора:

$$\begin{aligned}\bar{E}_1 &= E_{10} [1 - \delta_1 \mathcal{D}_\alpha^* (-\beta_1)], & \bar{E}_2 &= E_{20} [1 - \delta_2 \mathcal{D}_\alpha^* (-\beta_2)], \\ \bar{G} &= G_0 [1 - \delta_3 \mathcal{D}_\alpha^* (-\beta_3)],\end{aligned}\quad (7)$$

где  $\delta_1 = (E_{10} - E_{1\infty})/E_{10}$ ;  $\delta_2 = (E_{20} - E_{2\infty})/E_{20}$ ;  $\delta_3 = (G_0 - G_\infty)/G_0$ ;

$\beta_i = \delta_i \tau_i^{\alpha-1}$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $0 < \alpha < 1$ ;  $E_{10}$ ,  $E_{20}$ ,  $G_0$  — мгновенные модули упругости и сдвига;  $E_{1\infty}$ ,  $E_{2\infty}$ ,  $G_\infty$  — установившиеся модули упругости;  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\tau_3$  — времена релаксации при двух видах продольной и одной сдвиговой деформации.

$\mathcal{D}_\alpha^* (-\beta_i)$  — интегральный оператор, воздействующий на единицу:

$$\mathcal{D}_\alpha^* (-\beta_i) \cdot 1 = \int_0^t \mathcal{D}_\alpha (-\beta_i s) ds \quad (i = 1, 2, 3),$$

где  $\mathcal{D}_\alpha (-\beta_i, s)$  — специальная функция дробного порядка Ю. Н. Работнова (3):

$$\mathcal{D}_\alpha (-\beta_i; s) = s^{-\alpha} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^v S^{v(1-\alpha)}}{\Gamma[(v+1)(1-\alpha)]},$$

$\Gamma$  — гамма-функция.

Следуя Н. Х. Арутюняну (4), примем, что параметры  $\mu_1$  и  $\mu_2$  не изменяются во времени.

Подставляя (7) в равенство (6) и учитывая значения  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_3$ , получим:

$$T_{кр}(t) = T_{кр}(0) \left[ 1 - \sum_{i=1}^3 a_i \mathcal{D}_\alpha^* (-\beta_i) \right],$$

где  $a_1 = E_{10} h \delta_1 (1 + 2\mu_2)/T$ ;  $a_2 = E_{20} h \delta_2 / T$ ;  $a_3 = 4G_0 h^3 \delta_3 (1 - \mu_1 \mu_2)/T$ ;  $T = E_{10} h (1 + 2\mu_2) + E_{20} h + 4h^3 G_0 (1 - \mu_1 \mu_2)$ .

Так как по физическому смыслу  $T_{кр}(0)$  не зависит от времени, то можно воспользоваться зависимостью, установленной М. И. Розовским (5).

$$\mathcal{D}_\alpha^* (-\beta) \cdot 1 = \frac{1}{\beta} [1 - E_{1-\alpha} (-\beta t^{1-\alpha})], \quad (8)$$

где  $E_{1-\alpha}$  — функция Миттаг-Леффлера порядка  $\mu = 1 - \alpha$ , определяемая рядом

$$E_\mu (-\xi) = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{\xi^v}{\Gamma(v\mu + 1)}. \quad (9)$$

Учитывая (8), имеем

$$T_{кр}(t) = T_{кр}(0) \left\{ 1 - \sum_{i=1}^3 \frac{a_i}{\beta_i} [1 - E_\mu (-\beta_i t^\mu)] \right\}. \quad (10)$$

Так как  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} E_{\mu}(-\xi) = 0$ , то из (10) следует

$$T_{\text{кр}}(\infty) = T_{\text{кр}}(0) \left( 1 - \sum_{i=1}^3 \frac{a_i}{\beta_i} \right). \quad (11)$$

Из (11) заключаем, что  $T_{\text{кр}}(\infty) < T_{\text{кр}}(0)$ . Отношение  $T_{\text{кр}}(\infty)/T_{\text{кр}}(0)$  зависит от реологических свойств материала и геометрических характеристик исследуемой пластины.

Применение функции Миттаг-Леффлера позволяет установить точную зависимость между мгновенным и установившимся значениями критической силы. Так как ряд (9), определяющий функцию Миттаг-Леффлера, медленно сходится, то для практического его применения при различных фиксированных моментах времени  $0 < t < \infty$  воспользуемся аппроксимацией М. И. Розовского <sup>(5)</sup>  $E_{\mu}(-\xi) \approx e^{-\gamma_1 \xi}$ , где  $\gamma_1 = (1 - \alpha)^{1-\alpha}$ . Таким образом, окончательное значение критической силы имеет вид

$$T_{\text{кр}}(t) \approx T_{\text{кр}}(0) \left\{ 1 - \sum_{i=1}^3 \frac{a_i}{\beta_i} [1 - \exp(\gamma_1 \beta_i t)^{1-\alpha}] \right\}. \quad (12)$$

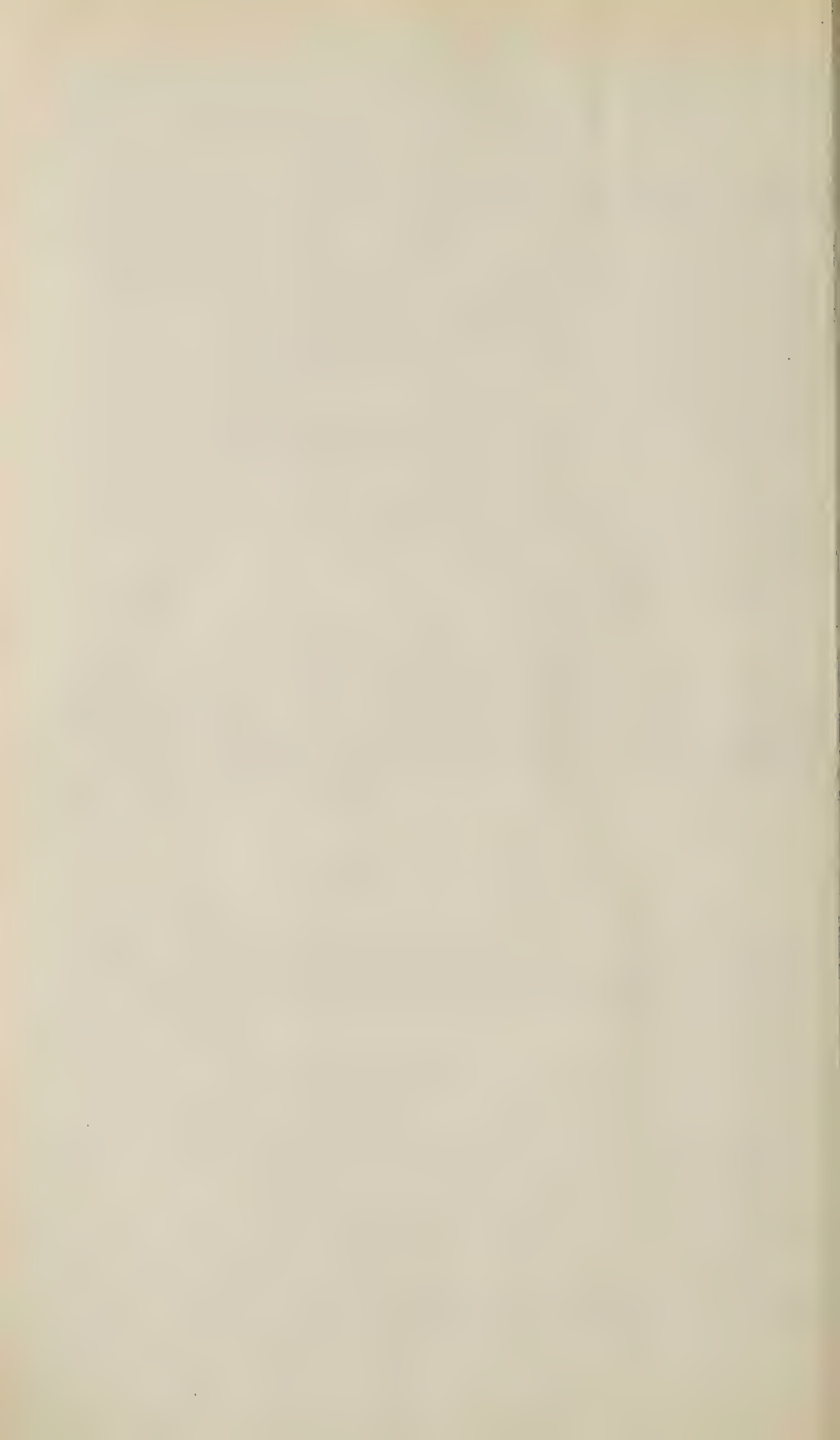
Полагая  $\alpha = 0$ , получим результаты, следующие из теории упруго-вязкого тела в аналитической трактовке А. Ю. Ишлинского <sup>(6)</sup> и А. Р. Ржаницына <sup>(7)</sup>.

Днепропетровский инженерно-строительный институт

Поступило  
30 I 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> М. И. Филоненко-Бородич, Прикл. матем. и мех., № 1 (1946).  
<sup>2</sup> М. Р. Фельдман, Инж. сборн., Инст. мех. АН СССР, 2, в. 1 (1943). <sup>3</sup> Ю. Н. Работнов, Прикл. матем. и мех., 12, в. 1 (1948). <sup>4</sup> Н. Х. Арутюнян, Некоторые вопросы теории ползучести, 1952. <sup>5</sup> М. И. Розовский, Научн. докл. Высш. школы, физ.-матем. науки, № 6 (1958). <sup>6</sup> А. Ю. Ишлинский, Прикл. матем. и мех., 4, в. 1 (1940). <sup>7</sup> А. Р. Ржаницын, ДАН, 52, № 1 (1946).



В. Ф. КИТАЕВА и Н. Н. СОБОЛЕВ

## ОБ УШИРЕНИИ ЛИНИЙ ВОДОРОДА В ПЛАЗМЕ ДУГИ И УДАРНОЙ ТРУБЫ

(Представлено академиком Л. А. Арцимовичем 15 XII 1960)

До последнего времени определение концентрации заряженных частиц в плазме по линиям водорода проводилось путем сравнения экспериментальных контуров этих линий с теоретическими, рассчитанными по теории Хольтсмарка<sup>(1-4)</sup>. Однако надежность получаемых результатов всегда вызывала сомнение, так как теория Хольтсмарка учитывает только статистическое действие ионов и пренебрегает эффектом ударного электронного уширения, причем учет действия ионов вводится, пренебрегая влиянием взаимной корреляции положений заряженных частиц и тепловым движением ионов.

Грим, Колб и Шен<sup>(5)</sup> (Г. К. Ш.) рассчитали контуры линий водорода при совместном уширяющем действии ионов и электронов. Они рассмотрели систему: атом водорода, находящийся в статическом поле  $E$ , вызывающем штарковское расщепление уровней атома водорода, и электрон, движущийся со скоростью  $v$  на прицельном расстоянии  $\rho$  от излучающего атома. Г. К. Ш. решили временное уравнение Шредингера для оператора развития во времени в ударном приближении. Это решение позволило учесть переходы между штарковскими компонентами отдельного уровня, индуцированные электронными ударами, и тем самым определить после усреднения по параметру пролета  $\rho$  и скорости электронов  $v$  контур линии атома водорода, находящегося в статическом поле  $E$  и возмущенного пролетающими электронами.

Вторая часть задачи — учет уширяющего действия микрополя ионов — решена путем интегрирования по всем значениям поля  $E$ . В качестве функции распределения  $W(E)$  была взята функция Эккера, учитывающая ионные корреляции и эффект электронного экранирования.

При рассмотрении задачи о совместном уширении ионами и электронами Г. К. Ш. ввели ряд приближений: решение уравнения Шредингера в квазиклассическом приближении (электрон рассматривается как точечный заряд, движущийся по прямолинейной траектории); обрезание интегралов при усреднении по  $\rho$  снизу на радиусе Вейскопфа, сверху на радиусе Дебая; использование в качестве функции распределения  $W(E)$  функции Эккера, которая недостаточно обоснована и вряд ли справедлива при больших плотностях ионов ( $N_i > 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $T = 10\,000^\circ \text{ K}$ ) и др. Все сделанные приближения Г. К. Ш. проанализировали и обосновали их допустимость, но, несмотря на это, необходимо сравнить теорию Г. К. Ш. с экспериментом, так как адекватность теории интересна с точки зрения физики процесса, и с практической точки зрения — с точки зрения диагностики плазмы.

Настоящее сообщение посвящено сравнению экспериментальных контуров линий  $H_\alpha$  и  $H_\beta$  с теоретическими, рассчитанными по теории Г. К. Ш.

На рис. 1 приведены экспериментальные контуры линий  $H_\alpha$  и  $H_\beta$ , излучаемых угольной дугой постоянного тока, горящей в атмосфере аргона с примесью 5% водорода, при силе тока  $i = 200 \text{ а}$ <sup>(6)</sup>. Линии регистрировались с помощью спектрографа ДФС-4. Полуширина аппаратной функции составляла  $0,3 \text{ \AA}$ .

На рис. 2 приведены контуры линий  $H_\alpha$  и  $H_\beta$ , полученные в газе за ударной волной<sup>(7)</sup>: на рис. 2а — контур линии  $H_\alpha$  в криптоне с примесью  $\sim 1\%$  водорода за проходящей ударной волной, на рис. 2б — контур

линии  $H_\beta$  в аргоне с примесью  $\sim 2\%$  водорода за отраженной ударной волной. Линия  $H_\beta$  регистрировалась спектрографом ИСП-51 со средней камерой ( $f = 270$  мм, полуширина аппаратной функции  $\sim 0,8$  Å), линия  $H_\alpha$  — спектрографом ИСП-51 с длинной камерой ( $f = 840$  мм, полуширина аппаратной функции  $\sim 1$  Å).

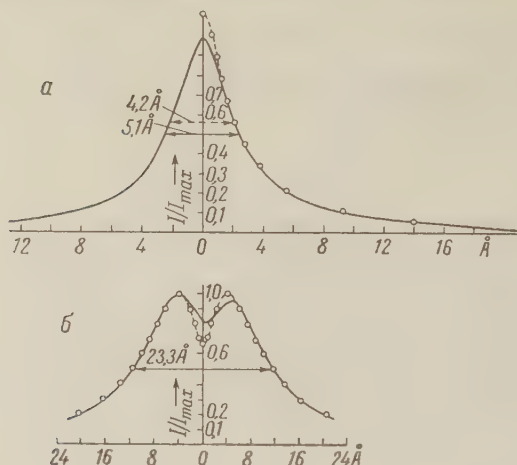


Рис. 1. Контуры линий  $H_\alpha$  (а) и  $H_\beta$  (б) в дуге. Сплошная линия — экспериментальный контур; точки — теоретический контур, рассчитанный по теории Г. К. Ш. (а —  $N = 4 \cdot 10^{16}$  см $^{-3}$ , б —  $N = 3,9 \cdot 10^{16}$  см $^{-3}$ )

эксперимента ухудшалось. Экспериментальный контур линии  $H_\beta$  хорошо совпадает с тем теоретическим, полуширина которого равна полуширине экспериментального. Удовлетворительное согласие между теорией и экспериментом при исследовании в дуге для линии  $H_\alpha$  (за исключением центра линии) наблюдалось тогда, когда полуширина теоретического контура была на  $\sim 20\%$  меньше полуширины экспериментального (см. рис. 1а). Согласие экспериментальных и теоретических контуров линии  $H_\alpha$  с равными полуширинами наблюдалось при исследованиях в ударной трубе, когда полуширина экспериментального контура линии  $H_\alpha$  была больше 8 Å.

Из сравнения экспериментальных и теоретических контуров линий  $H_\alpha$  и  $H_\beta$  были получены концентрации заряженных частиц как в газе за ударной волной, так и в плазме дуги. Концентрации, полученные для одного режима по контуру линии  $H_\alpha$  и по полуширине линии  $H_\beta$ , совпадают в пределах точности эксперимента ( $\sim 10\%$ ). Вполне удовлетворительное согласие имеет место и между концентрациями, определенными по контурам линий  $H_\alpha$  и  $H_\beta$ , и концентрациями заряженных частиц, рассчитанными по формуле Саха.

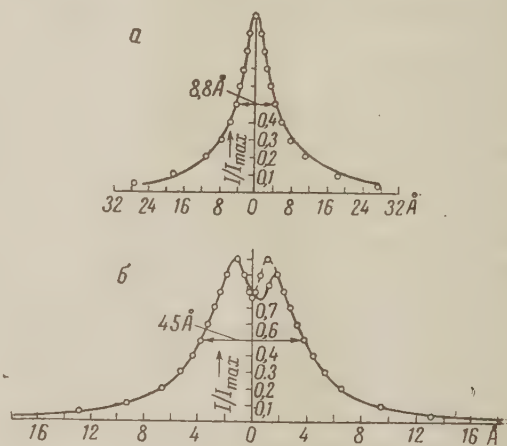


Рис. 2. Контуры линий  $H_\alpha$  (а) и  $H_\beta$  (б) в газе за ударной волной. Сплошная линия — экспериментальный контур; точки — теоретический контур, рассчитанный по теории Г. К. Ш. (а —  $N = 9,5 \cdot 10^{16}$  см $^{-3}$ , б —  $N = 1 \cdot 10^{17}$  см $^{-3}$ )

Совпадение теоретических и экспериментальных контуров, а также согласие между концентрациями, определенными по контурам  $H_\alpha$  и  $H_\beta$  и рассчитанными по формуле Саха, позволяет сделать вывод, что теория Г. К. Ш. в целом удовлетворительно отображает уширение линий водорода в плазме и может быть использована для определения концентраций заряженных частиц в плазме. Для определения этой концентрации нет необходимости каждый раз детально изучать контур линии  $H_\beta$ . Хорошее согласие экспериментальных и теоретических контуров позволяет рекомендовать определение концентрации заряженных частиц по полуширине линии  $H_\beta$  с использованием графика теоретической зависимости полуширины

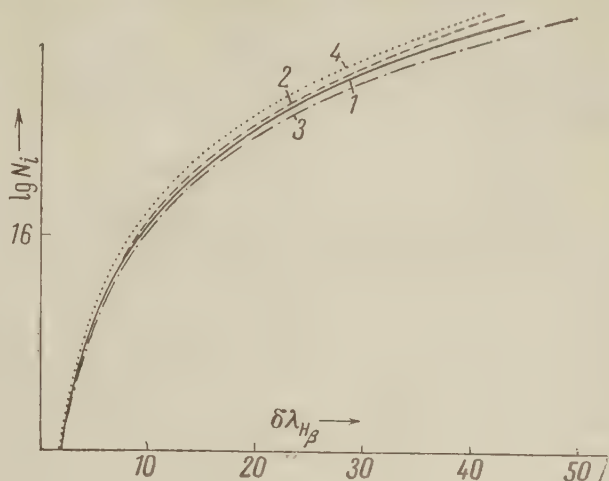


Рис. 3. Графики зависимости полуширины линии  $H_\beta$  от концентрации заряженных частиц. 1, 2 и 3 — по данным Г. К. Ш.: 1 —  $T = 10\,000^\circ\text{K}$ ; 2 —  $20\,000^\circ\text{K}$ ; 3 —  $40\,000^\circ\text{K}$ ; 4 — по Хольтсмарку

от концентрации. На рис. 3 приведены графики зависимости  $\delta\lambda_{H_\beta}$  от  $N_i$  для температур  $10\,000$ ,  $20\,000$  и  $40\,000^\circ\text{K}$ , построенные на основании данных Г. К. Ш. На этом же рисунке для сравнения приведен график зависимости  $\delta\lambda_{H_\beta}$  от  $N_i$ , соответствующий теории Хольтсмарка. Одной и той же полуширине линии  $H_\beta$  по теории Хольтсмарка соответствуют большие концентрации, чем по теории Г. К. Ш. (При  $\delta\lambda_{H_\beta} = 40 \text{ \AA}$   $N_i$  по Хольтсмарку на  $\sim 18\%$  больше  $N_i$  по Г. К. Ш. для  $T = 10\,000^\circ\text{K}$ .)

Интересно отметить, что зависимость  $N_i$  от  $T$  (для данного значения  $\delta\lambda_{H_\beta}$ ) при  $N_i > 10^{15} \text{ см}^{-3}$  носит немонотонный характер: при возрастании  $T$  от  $10\,000$  до  $20\,000^\circ\text{K}$   $N_i$  растет, при дальнейшем росте температуры  $N_i$  начинает убывать, проходит через значение, соответствующее  $T = 10\,000^\circ\text{K}$ , и при  $T = 40\,000^\circ\text{K}$  имеет значение меньше, чем при  $T = 10\,000^\circ\text{K}$ .

Резюмируя результаты наших исследований, следует рекомендовать для определения концентрации заряженных частиц в диапазоне  $N_i = 2 \cdot 10^{15} \div 10^{17}$  линию  $H_\beta$  (определение концентрации можно проводить по полуширине этой линии), для  $N_i \gtrsim 3 \cdot 10^{16}$  — линию  $H_\alpha$ . Расширение диапазона применимости метода определения концентрации заряженных частиц по линиям водорода в сторону меньших концентраций возможно за счет использования для этой цели линий с более высокими квантовыми числами, а также за счет учета в теории Г. К. Ш. эффекта Доплера.

Детальный анализ результатов сравнения экспериментальных и теоретических контуров линий  $H_\alpha$  и  $H_\beta$  показывает, что экспериментальные контуры в целом удовлетворительно описываются теорией Г. К. Ш., однако по теории Г. К. Ш. контур  $H_\beta$  должен быть симметричным, экспериментальные же контуры линии  $H_\beta$  асимметричны<sup>(7)</sup>: фиолетовый и красный максимумы линии  $H_\beta$  несимметричны как по положению относительно центра линии, так и по интенсивности. Грим<sup>(8)</sup> объясняет асимметрию в линии  $H_\beta$  влиянием квадратичного штарк-эффекта, которое в теории Г. К. Ш. не учтено. Кроме того величина провала интенсивности в центре экспериментального контура  $H_\beta$  для широких линий ( $\delta\lambda_{H_\beta} > 40 \text{ \AA}$ ) больше теоретической, для более узких линий — меньше теоретической.

Теоретическая зависимость расстояния  $\Delta_{H\beta}$  между фиолетовым и красным максимумами линии от полуширины  $\delta\lambda_{H\beta}$  линии  $H\beta$  (см. рис. 4) также отличается от экспериментальной: для  $\delta\lambda_{H\beta} > 40 \text{ \AA}$  экспериментально измеренная величина  $\Delta_{H\beta}$  с ростом  $\delta\lambda_{H\beta}$  растет быстрее, чем теоретическая. Углубление провала при больших  $\delta\lambda_{H\beta}$  по сравнению с теорией Г. К. Ш., а также более быстрый, чем предсказывает теория, рост

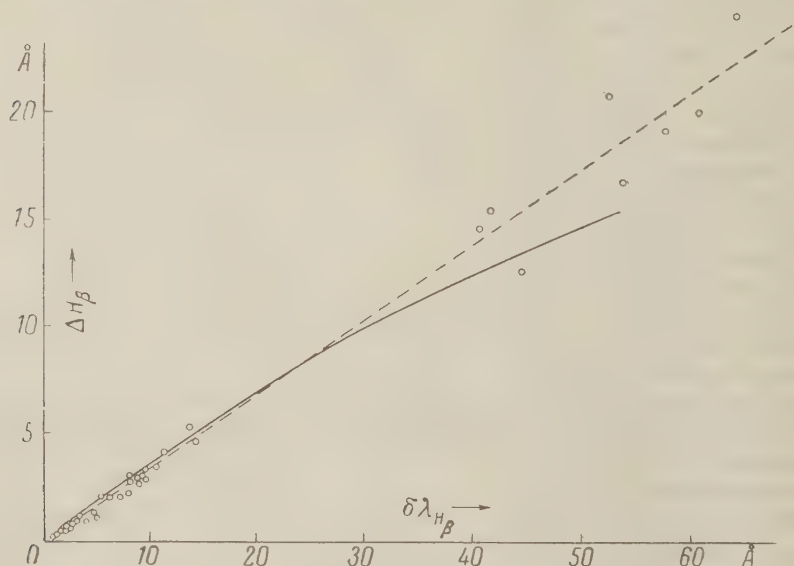


Рис. 4. График зависимости расстояния  $\Delta_{H\beta}$  между фиолетовым и красным максимумами линии  $H\beta$  от полуширины линии  $\delta\lambda_{H\beta}$ . Сплошная линия — по теории Г. К. Ш.; точки — эксперимент

$\Delta_{H\beta}$  с  $\delta\lambda_{H\beta}$  может, по-видимому, свидетельствовать о необходимости учета в теории роли далеких электронов, т. е. о том, что обрезание интегралов следует проводить на радиусе, большем радиуса Дебая.

Сглаживание глубины провала для малых  $\delta\lambda_{H\beta}$  может быть понято, если принять во внимание эффект Допплера и недостаточную разрешающую способность аппаратуры.

Таким образом, эксперимент указывает, что теория Г. К. Ш. уширения линий водорода должна быть уточнена для центра линии. При этом уточнении следует еще раз проанализировать допустимость обрезания интегралов на радиусе Дебая, а также учесть роль эффекта Допплера.

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Поступило  
3 XII 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Г. Юргенс, Сборн. Оптическая пирометрия плазмы, ИЛ, 1960. <sup>2</sup> P. Vogel, Zs. f. Phys., **149**, 62 (1957).
- <sup>3</sup> P. J. Dickerman, J. Appl. Phys., **29**, 598 (1958).
- <sup>4</sup> В. Н. Алямовский, В. Ф. Китаева, Оптика и спектроскопия, **8**, 152 (1960).
- <sup>5</sup> H. R. Griem, A. C. Kolb, K. J. Shen, Stark Broadening of Hydrogen Lines in Plasma, March 4, N. Report 5455, U. S. N. R. L. Washington, 1960; Phys. Rev., **116**, 4 (1959); A. C. Kolb, H. Griem, Phys. Rev., **111**, 514 (1958).
- <sup>6</sup> В. Ф. Китаева, В. В. Обухов-Денисов, Н. Н. Соболев, Тр. XIII совещ. по спектроскопии, Л., 1960 (в печати).
- <sup>7</sup> В. Н. Алямовский, А. П. Дронов, В. Ф. Китаева, А. Г. Свиридов, Н. Н. Соболев, Тр. II совещ. по теорет. и прикладн. магнитной гидродинамике, Рига, 1960 (в печати).
- <sup>8</sup> H. Griem, Zs. f. Phys., **137**, 280 (1954).

Л. В. ТВЕРСКАЯ

## О ВЛИЯНИИ УПРУГО-РЕЛАКСАЦИОННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА КРИСТАЛЛИЗАЦИЮ ОЧЕНЬ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 9 XII 1960)

Влияние упругих напряжений на плавление твердых тел было рассмотрено в (1). Аналогичные явления могут иметь место при кристаллизации очень вязких жидкостей, так как последние обладают упругими свойствами (для стекол, например, модуль сдвига  $\sim 5 \cdot 10^{11}$  дн/см<sup>2</sup>).

Так как в аморфной среде упругие напряжения затухают со временем, влияние их на кристаллизацию проявляется в том случае, когда рост кристалла обгоняет релаксацию напряжений. По-видимому, это всегда имеет место, так как для перехода атома из жидкой фазы в твердую требуется время  $\tau_0$ , равное времени однократного изменения положения равновесия, а для релаксации напряжений должно произойти несколько таких перескоков. Время релаксации  $\tau$  определяется перестройкой структуры жидкости в пределах сохранения ближнего порядка и, вследствие хаотического характера движения, равно времени диффузии на соответствующее характерное расстояние  $D = nd$ , где  $d$  — среднее межатомное расстояние. Легко видеть, что  $\tau \sim n^2 \tau_0$ . Для обычных жидкостей  $n = 3 \div 4$ , а для очень вязких жидкостей еще больше, так что  $\tau > 10 \tau_0$ .

Вероятность флуктуативного образования зародышей твердой фазы в очень вязких жидкостях практически равна нулю, и мы не будем касаться этого вопроса, считая, что вследствие влияния примесей всегда существуют зародыши, преодолевшие поверхностный барьер. Будем считать растущие кристаллы сферическими, что вполне допустимо на начальной стадии процесса.

Если на границе кристалла имеется напряжение  $\sigma_{rr}(R) = -\delta p$  (это будет иметь место в том случае, когда плотность кристалла  $\rho_2$  больше плотности аморфной фазы  $\rho_1$ ), температура плавления, согласно уравнению Клапейрона — Клаузиуса, понизится. Именно, если кристаллизация ведется при температуре  $T_1$ , кристалл радиуса  $R$  будет находиться в равновесии со средой при

$$\sigma_{rr}(R) = \left( \frac{T_0 - T_1}{T_0} q \rho_2 - \frac{2\alpha}{R} \right) \frac{1}{3\beta} \equiv \sigma_{rr}^{(0)}, \quad (1)$$

где  $T_0$  — точка плавления плоской недеформированной поверхности;  $q$  — теплота перехода на грамм;  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $3\beta$  — относительное изменение плотности при кристаллизации.

Если  $\sigma_{rr}(R) > \sigma_{rr}^{(0)}$ , кристалл плавится; если же  $\sigma_{rr}(R) < \sigma_{rr}^{(0)}$ , кристалл растет, причем характерным временем процесса в том и другом случае является  $\tau_0$ .

Очевидно, что при определенных условиях соотношение (1) выполняется. Тогда в течение некоторого времени рост кристалла обусловлен релаксацией напряжений. Считая (1) граничным условием, рассмотрим задачу о росте кристалла, обусловленном указанным процессом.

Пусть модуль Юнга и коэффициент Пуассона в аморфной фазе и в кристалле равны соответственно  $E_1$ ,  $\sigma_1$  и  $E_2$ ,  $\sigma_2$ . Компоненты вектора

и тензора деформаций  $u_i$  и  $u_{ik}$  и тензора напряжений  $\sigma_{ik}$ , относящиеся к различным средам, также отметим индексами (1) и (2). Будем считать, что в кристалле справедлив закон Гука:

$$\sigma_{ik}^{(2)} = \frac{E_2}{1 + \sigma_2} \left( u_{ik}^{(2)} + \frac{\sigma_2}{1 - 2\sigma_2} u_{il}^{(2)} \right). \quad (2)$$

И в кристалле, и в аморфной фазе выполняются условия равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ik}^{(1,2)}}{\partial x_k} = 0. \quad (3)$$

В аморфной фазе упруго-релаксационные напряжения описываются интерполяционным уравнением для очень вязких жидкостей (см., например, (2))

$$\frac{d\sigma_{ik}^{(1)}}{dt} + \frac{1}{\tau} \sigma_{ik}^{(1)} = \frac{E_1}{1 + \sigma_1} \frac{du_{ik}^{(1)}}{dt}. \quad (4)$$

На границе  $r = R$ , помимо (1), выполняются условия равновесия

$$\sigma_{rr}^{(1)}(R) = \sigma_{rr}^{(2)}(R) \quad (5)$$

и сохранения количества вещества

$$u_r^{(2)} - u_r^{(1)} = \beta R. \quad (6)$$

Пространственное распределение соответствующих величин дается известными формулами теории упругости. Величины, входящие в граничные условия, имеют вид

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \frac{2E_1}{1 + \sigma_1} a(t) \frac{1}{r^3}; \quad u_r^{(1)} = \frac{b(t)}{r^2}; \quad (7)$$

$$\sigma_{rr}^{(2)} = \frac{c(t) E_2}{1 - 2\sigma_2}; \quad u_r^{(2)} = c(t) r,$$

где  $a$  и  $b$  связаны уравнением:

$$\dot{a} + \frac{1}{\tau} a = -\dot{b}. \quad (8)$$

Исключая  $a$ ,  $b$  и  $c$ , находим уравнение роста кристалла

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1 + \sigma_1}{2E_1} + \frac{1 - 2\sigma_2}{E_2} \right) \frac{d}{dt} R^2 \left( \frac{T_0 - T_1}{T_0} q p_2 R - 2\alpha \right) + \\ & + \frac{1}{\tau} R^2 \frac{1 + \sigma_1}{2E_1} \left( \frac{T_0 - T_1}{T_0} q p_2 R - 2\alpha \right) = 3\beta^2 R^2 \frac{dR}{dt}. \end{aligned} \quad (9)$$

Решение, удовлетворяющее начальному условию  $R_{t=0} = R_1$ , имеет вид

$$R \left( \frac{R - R_0}{R_1 - R_0} \right)^v = R_1 e^{-t/\tau_1}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{2\alpha T_0}{(T_0 - T_1) q p_2} \quad (\text{критический размер зародыша}); \\ v &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{3\beta^2 E_1 E_2 T_0}{q p_2 (T_0 - T_1) [(1 + \sigma_1) E_2 + (1 - 2\sigma_2) E_1]} \right), \\ \tau_1 &= 2\tau \left( 1 + \frac{2E_1}{E_2} \frac{1 - 2\sigma_2}{1 + \sigma_1} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Полученное решение описывает реальный процесс лишь при условии  $R > 0$ . В противном случае, как легко видеть, при  $\delta R > 0$   $\sigma_{rr} > \sigma_{rr}^{(0)}$ , и условие (1) теряет силу и кристалл растет неравновесным образом, если  $R_1 > R_0$ , и растворяется в противном случае.

Будем считать, что  $R_1 > R_0$ , т. е. поверхностный барьер преодолен. Если  $v > 0$ ,  $\dot{R} < 0$ . Упругие напряжения не определяют роста кристалла. Если  $0 > v > -1$ , то при условии

$$R < \frac{R_0}{1 - |v|} \quad (12)$$

$R > 0$ . При этом условие (1) выполняется за счет влияния поверхностного натяжения (критические напряжения достаточно малы), и рост кристалла определяется релаксацией упругих напряжений. Затем напряжения падают ниже критической величины, и рост кристалла продолжается неравновесным образом (с характерным временем  $\tau_0$ ).

При  $v < -1$  при любых  $R$  возрастание упругих напряжений лимитирует рост кристалла. При  $t \rightarrow \infty$

$$R \sim e^{-t/\tau_1(v+1)}. \quad (13)$$

При  $v$  больших и близких к  $-1$  характерным временем роста является  $\tau_0$ . Обобщая полученные результаты, можно сказать, что время роста кристалла равно  $\tau_1(v+1) + \tau_0$  при  $v < -1$  и  $\tau_0$  при  $v > -1$ . Так как  $\tau_0$  и  $\tau_1$  сильно зависят от температуры (как  $e^{U/kT}$ ), а  $v \rightarrow \infty$  при  $T_1 \rightarrow T_0$ , скорость кристаллизации также должна существенно зависеть от температуры.

Пусть  $\tau_1 = \tau_1^{(0)} e^{U/kT_1}$ ,  $\tau_0 = \tau_0^{(0)} e^{U/kT_1}$ , причем  $\tau_0^{(0)} \ll \tau_1^{(0)}$  (см. выше). Найдем степень переохлаждения  $\frac{T_0 - T_1}{T_0}$ , при которой характерное время кристаллизации минимально. Для этого найдем минимум выражения  $\tau_1(v+1) + \tau_0$ . Если соответствующая степень переохлаждения будет лежать в интервале  $v < -1$ , она и будет давать максимальную скорость кристаллизации. Если же она выйдет из этого интервала, максимальная скорость кристаллизации будет достигнута при  $v = -1$ .

При вычислениях будем считать, что  $T_0 - T_1 \ll T_0$  и  $kT_0 \ll U_0$  (обычно эти условия всегда справедливы). Получаем

$$\left(\frac{T_0 - T_1}{T_0}\right)_{\max} = \frac{kT_0}{U} \left\{ 1 + \frac{kT_0}{U} \frac{q\rho_2 [(1 + \sigma_1) E_2 + (1 - 2\sigma_2) E_1]}{2E_1 E_2 \beta^2} \right\}. \quad (14)$$

Эта степень переохлаждения может давать  $v$  как меньше, так и больше  $-1$ . В последнем случае максимальной скорости соответствует степень переохлаждения

$$\left(\frac{T_0 - T_1}{T_0}\right)_{\max} = \frac{\beta^2 E_1 E_2}{q\rho_2 [(1 + \sigma_1) E_2 + (1 - 2\sigma_2) E_1]}. \quad (15)$$

Таким образом, мы показали, что максимальной скорости кристаллизации очень вязких жидкостей соответствует некоторая степень переохлаждения, отличная от нуля, подобно тому как это имеет место в обычных жидкостях (3). Однако механизм этого сдвига отличен от рассмотренного в (3) (малая вероятность флуктуаций при слабом переохлаждении) и связан с релаксационно-упругими процессами.

Государственный научно-исследовательский институт  
электротехнического стекла и технологического  
оборудования

Поступило  
2 XII 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

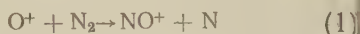
<sup>1</sup> И. М. Лифшиц, Л. С. Гулида, ДАН, 87, № 3, 377 (1952). <sup>2</sup> Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, М., 1954. <sup>3</sup> Я. И. Френкель, Кинетическая теория жидкостей, Собр. избр. тр., 3, М.—Л., 1959.

А. Д. ДАНИЛОВ

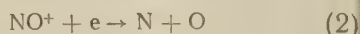
# МОЛЕКУЛЯРНЫЕ ИОНЫ В ВЕРХНЕЙ АТМОСФЕРЕ

(Представлено академиком Е. К. Федоровым 26 XII 1960)

Данные о ионном составе верхней атмосферы, полученные В. Г. Истоминым на геофизических ракетах <sup>(1)</sup> и третьем советском искусственном спутнике Земли <sup>(2,3)</sup>, позволили рассмотреть ряд процессов, в которых участвуют эти ионы. В работе <sup>(4)</sup> было показано, что механизм образования ионов  $\text{NO}^+$  по реакции перезарядки

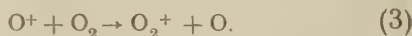


и исчезновения ионов  $\text{NO}^+$  по реакции диссоциативной рекомбинации



хорошо объясняет наблюдаемое отношение концентраций  $[\text{NO}^+]/[\text{O}^+]$ .

Ряд авторов <sup>(5,6)</sup> считают, что ионы  $\text{O}_2^+$  образуются в атмосфере в результате перезарядки ионов атомарного кислорода с молекулами  $\text{O}_2$ :



Однако тот факт, что ионы  $\text{O}_2^+$  наблюдаются до высот 400 км, а молекулярный кислород должен быть полностью диссоциирован выше 200 км, заставля-

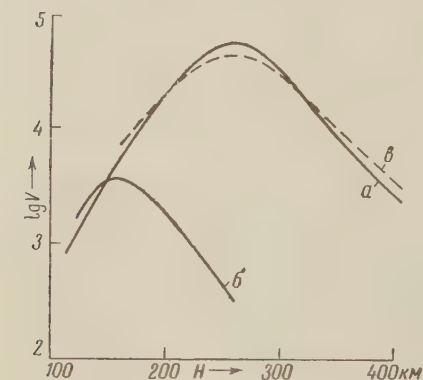
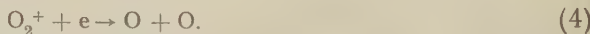


Рис. 1. *a* — скорость исчезновения ионов  $\text{O}_2^+$ ; *b* — скорость образования ионов  $\text{O}_2^+$  по реакции (3); *b'* — скорость образования ионов  $\text{O}_2^+$  по реакции (5)

ет усомниться в том, что механизм перезарядки ответственен за образование ионов  $\text{O}_2^+$  на всех высотах, где эти ионы наблюдаются. Если реакция (2) ответственна за образование ионов  $\text{O}_2^+$ , то она на всех высотах должна компенсировать исчезновение этих ионов по реакции

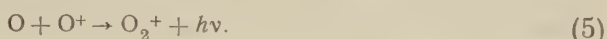


Концентрации ионов получены экспериментально в работе В. Г. Истомина, электронов — в работе К. И. Грингауза <sup>(7)</sup> и молекулярного кислорода в работе Байрама и др. <sup>(8)</sup>. На основании этих концентраций и величин коэффициентов скоростей реакций (3) и (4), подробно обсужденных в <sup>(4)</sup> и равных  $10^{-10}$  и  $10^{-6} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$ , подсчитана скорость образования ионов  $\text{O}_2^+$  по реакции (3) и исчезновения этих ионов по реакции (4).

Результаты вычислений, приведенные на рис. 1 (кривые *a* и *b*), показывают, что реакция (3) может обеспечить необходимую скорость образования ионов  $\text{O}_2^+$  только до высот 150—160 км, а выше скорость этой реакции резко падает из-за уменьшения концентрации  $\text{O}_2$  за счет диссоциации.

Аналогичным образом отпадает возможность объяснения образования ионов  $O_2^+$  путем прямой фотоионизации молекул  $O_2$ , так как на высотах 300—400 км не может быть достаточного количества недиссоциированных молекул кислорода.

Создается впечатление, что для объяснения наличия ионов  $O_2^+$  на больших высотах следует искать механизм их образования, не зависящий от концентрации молекул  $O_2$ . Таким механизмом может быть реакция рекомбинации с излучением нейтрального и ионизированного атомов кислорода:



Никаких определенных данных о величине коэффициента скорости этой реакции нет. Поэтому имеет смысл рассмотреть только ход скорости образования ионов  $O_2^+$  в результате этой реакции с высотой. Величина  $[O]$  взята из данных о плотности (<sup>9</sup>, <sup>10</sup>) в предположении, что на рассматриваемых высотах кислород полностью диссоциирован, а эффектами диффузионного разделения можно пренебречь:

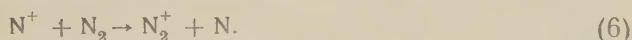
$$[O] = \frac{1}{5} \frac{\rho}{m_0},$$

где  $m_0$  — масса атома кислорода в граммах.

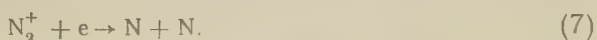
Результаты вычислений, приведенные на рис. 1 (кривая *в*), показывают, что ход скорости образования ионов  $O_2^+$  по реакции (5)

близко совпадает с ходом исчезновения этих ионов. Для совпадения абсолютных величин скоростей требуется, чтобы величина коэффициента скорости реакции (5) была равна  $5 \cdot 10^{-11} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$ . Таким образом, реакция (5) при условии, что коэффициент скорости этой реакции достаточно высок, может объяснить существование ионов  $O_2^+$  на больших высотах.

Представляется естественным рассмотреть возможность образования ионов  $N_2^+$  по реакции перезарядки, аналогичной (1) и (3):



При коэффициенте скорости  $\gamma$  порядка  $10^{-10} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$  скорость образования ионов  $N_2^+$  по этой реакции на высотах, больших 200 км, в 5—10 раз выше, чем скорость прямой фотоионизации. Исчезновение ионов  $N_2^+$  должно происходить по реакции диссоциативной рекомбинации



Из условия равновесия этих реакций получено отношение  $[N_2^+]/[N^+]$ , которое можно сравнить с наблюдаемым. Концентрация  $N_2$  взята из экспериментальных значений плотности (<sup>10</sup>) аналогично (<sup>4</sup>). Результаты вычислений приведены на рис. 2, 1. На рис. 2,2 приведены значения отношения  $[N_2^+]/[N^+]$ , полученные В. Г. Истоминым. Совпадение хода теоретической и наблюдаемой кривых показывает, что выбор реакций (6) и (7) для рассмотрения образования и исчезновения ионов  $N_2^+$  правилен и что именно эти реакции ответственны за существование этих ионов на высотах 200—500 км. Для совпадения абсолютных величин вычисленных и наблю-

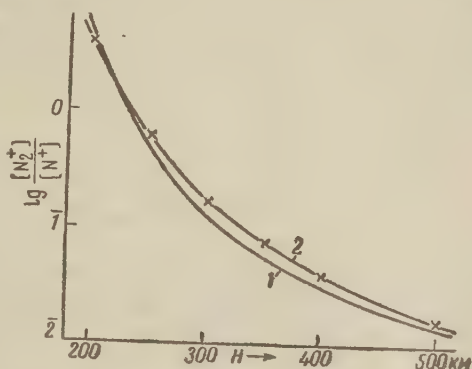


Рис. 2. Изменение с высотой отношения  $[N_2^+]/[N^+]$ . 1 — вычисленная кривая; 2 — данные В. Г. Истомина

даемых значений  $[N_2^+]/[N^+]$  величина  $\gamma$  должна быть равна  $4 \cdot 10^{-10} \text{см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$ , что согласуется с имеющимися данными о величине коэффициента скорости реакций перезарядки.

Таким образом, создается впечатление, что из 5 видов ионов в верхней атмосфере только 2 атомарных иона  $O^+$  и  $N^+$  являются «первичными», т. е. образуются в результате прямой фотоионизации, тогда как молекулярные ионы являются продуктом вторичных реакций, в которых участвуют атомарные ионы. В процессах рекомбинации, наоборот, ведущее место принадлежит молекулярным ионам, так как они очень быстро соединяются с электронами по реакциям диссоциативной рекомбинации, коэффициент

скорости которых исследован экспериментально (<sup>11,12</sup>) и равен  $10^{-6} \text{см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$ . Количество молекулярных ионов, находящихся в атмосфере на данной высоте, определяет эффективный коэффициент рекомбинации электронов  $\alpha'$ , который обычно определяется как

$$\frac{dn_e}{dt} = \alpha' n_e n_i, \quad (8)$$

где  $n_i$  — общее число ионов (равное  $n_e$ ) и  $dn_e/dt$  — скорость исчезновения электронов в единице объема в секунду. Действительно, поскольку коэффициент скорости реакций диссоциативной рекомбинации на 6 порядков выше скорости реакций радиативной рекомбинации, исчезновение элек-

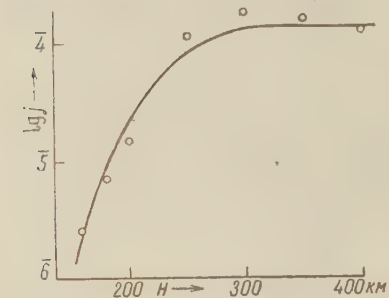


Рис. 3. Изменение с высотой интенсивности ионизации. Точки — значения  $j$ , вычисленные из (11); кривая — экспонента поглощения при  $\sigma = 5 \cdot 10^{-17} \text{см}^2$ .

тронов на высотах 100—500 км происходит в основном по реакциям (2), (4), (7). Тогда скорость исчезновения электронов в  $1 \text{см}^3$  в 1 сек. равна сумме скоростей этих реакций:

$$\frac{dn_e}{dt} = \{[\overline{NO^+}] + [\overline{O^+}] + [N_2^+]\} n_e \alpha^* = [\overline{M^+}] n_e \alpha^*, \quad (9)$$

Сравнивая (8) и (9), получаем  $\alpha' n_e [M^+] = \alpha' n_e^2$ , откуда

$$\alpha' = \alpha^* \frac{[M^+]}{n_e}, \quad (10)$$

где  $\alpha^*$  — коэффициент скорости реакций диссоциативной рекомбинации.

В том случае, когда молекулярные ионы составляют подавляющее большинство общего числа ионов (например, на  $H = 100 \text{ км}$ ), отношение  $[M^+]/n_e$  практически равно 1 и эффективный коэффициент рекомбинации электронов должен иметь порядок коэффициента  $\alpha^*$ . На высотах, где молекулярные ионы практически отсутствуют, электронная рекомбинация будет определяться реакциями радиативной рекомбинации и иметь эффективный коэффициент, близкий к  $10^{-12} \text{см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$ .

На высотах слоев E и F формула (10) приводит к значениям (см. табл. 1), на 2 порядка большим, чем принимаемые в настоящее время (<sup>13</sup>),

Таблица 1

$H, \text{ км}$	120	140	160	180	200	250	300	350	400
$\alpha^* \cdot 10^6$	1,0	0,97	0,89	0,76	0,58	0,17	0,04	0,02	0,015

однако эти значения находятся в хорошем согласии с новыми данными о высокой интенсивности ионизирующего излучения Солнца в ультрафиолетовой области спектра (<sup>14,15</sup>).

Знание общей скорости исчезновения ионов позволяет рассмотреть изменение интенсивности ионизации в верхней атмосфере. Исходя из условия равновесия

$$V_{\text{исч}} = [M^+] n_e \alpha^* = V_{\text{обр}} = [M] j, \quad j = \sigma_i n_{\text{кв}}, \quad (11)$$

где  $[M]$  — общая концентрация частиц в  $1 \text{ см}^3$  на данной высоте,  $j$  — коэффициент ионизации,  $\sigma_i$  — сечение ионизации,  $n_{\text{кв}}$  — поток ионизирующего излучения, нетрудно подсчитать  $j$  для каждой высоты.

При расчетах принималась модель атмосферы, использовавшаяся при рассмотрении образования ионов  $\text{NO}^+$ ,  $\text{O}_2^+$  и  $\text{N}_2^+$ .

Результаты вычислений, приведенные на рис. 3, показывают, что полученный из (11) ход величины  $j$  с высотой хорошо представляется экспонентой поглощения:

$$j = j_{\infty} e^{-\tau}, \quad \tau = N\sigma,$$

где  $j_{\infty}$  — коэффициент ионизации за пределами атмосферы;  $\tau$  — оптическая толщина;  $N$  — число нейтральных частиц в столбе атмосферы выше данного уровня;  $\sigma$  — сечение поглощения, при  $\sigma = 5 \cdot 10^{-17} \text{ см}^2$ . Полученное высокое значение  $\sigma$  (в несколько раз превышающее максимальное сечение поглощения атмосферными составляющими солнечного ультрафиолета) свидетельствует о более сильном поглощении ионизирующего агента в атмосфере Земли, чем это предполагалось до сих пор.

Институт прикладной геофизики  
Академии наук СССР

Поступило  
21 XII 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> В. Г. Истомин, Искусственные спутники Земли, в. 7, Изд. АН СССР, 1961.
- <sup>2</sup> В. Г. Истомин, Искусственные спутники Земли, в. 4, Изд. АН СССР, 1960, стр. 171.
- <sup>3</sup> В. Г. Истомин, ДАН, 129, № 4 (1959). <sup>4</sup> А. Д. Данилов, Искусственные спутники Земли, в. 5, Изд. АН СССР, 1960, стр. 60. <sup>5</sup> J. W. Chamberlain, Aph. J., 127 (1), 54 (1958). <sup>6</sup> J. C. Brandt, Aph. J., 128 (3), 718 (1958). <sup>7</sup> К. И. Грингауз, ДАН, 120, № 6, 1234 (1959). <sup>8</sup> Е. Т. Вугат, Т. А. Chubb, H. Friedman, Phys. Rev., 98, 1594 (1955). <sup>9</sup> В. В. Михневич, Искусственные спутники Земли, в. 2, Изд. АН СССР, 1958, стр. 26. <sup>10</sup> В. В. Михневич, Б. С. Данилин, А. И. Репнев, В. А. Соколов, Искусственные спутники Земли, в. 3, Изд. АН СССР, 1959, стр. 84. <sup>11</sup> E. P. Bialecke, A. A. Dougol, J. Geophys. Res., 63, № 3, 539 (1958). <sup>12</sup> R. B. Bryan, R. B. Holt, O. Oldenberg, Phys. Rev., 106, 83 (1957). <sup>13</sup> A. P. Mitra, J. Geophys. Res., 64, 7, 735 (1959). <sup>14</sup> Г. С. Иванов-Холодный, ДАН, 137, № 2 (1961). <sup>15</sup> Г. С. Иванов-Холодный, Г. М. Никольский, Астр. журн., 38, № 1 (1961).

В. Г. ИСТОМИН

# ИОНЫ АЗОТА В ВЕРХНЕЙ АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ И НОЧНАЯ ИОНИЗАЦИЯ В ОБЛАСТИ E

(Представлено академиком Е. К. Федоровым 26 XII 1960)

Существование ионов молекулярного азота в атмосфере, как одной из основных составляющих ионосферы, явно или неявно постулировалось многими авторами. Главным доводом служило наличие эмиссии первой отрицательной системы полос  $N_2^+$  ( $\lambda$  3914, 3884, 4278 и 4737 Å), особенно сильной в спектрах сумеречного неба

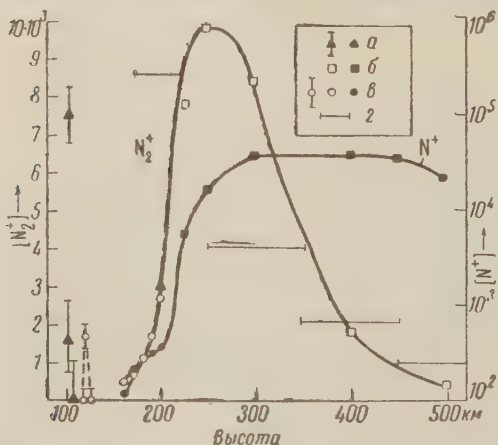


Рис. 1. Распределение положительных ионов молекулярного и атомарного азота в атмосфере по данным прямых масс-спектрометрических измерений: *a* — в пуске ракеты 2 VIII 1958 г., *б* — на третьем искусственном спутнике Земли, май 1958 г.; *в* — в пуске ракеты 15 VI 1960 г.; *г* — по косвенным данным <sup>(1)</sup> (горизонтальные отрезки обозначают интервал усреднения по высоте)

и полярных сияний, освещенных Солнцем. Когда были проведены первые прямые (масс-спектрометрические) анализы состава ионосферы <sup>(1,2)</sup>, выяснилось, что ионов азота не было обнаружено в достаточном количестве.

Ионы с массовым числом  $M = 28^+$ , отождествленные с  $N_2^+$ , были обнаружены днем на высотах 225—500 км как малая ( $\sim 3\%$ ) компонента в измерениях на третьем искусственном спутнике Земли <sup>(3)</sup>. В еще меньших количествах ( $\sim 1\%$ ) ионы молекулярного азота регистрировались в дневных ракетных измерениях на высотах 100—230 км <sup>(2,4)</sup>. Исследователями из США не было сделано никаких определенных выводов о распределении ионов  $N_2^+$  по высоте\*.

Являясь малой, но отнюдь не пренебрежимой компонентой ионосферы, ионы  $N_2^+$  играют важную роль, в частности, в процессах, определяющих общий баланс ионизации в атмосфере. Общеизвестно, что именно молекулярные ионы должны в большой степени определять эффективный коэффициент рекомбинации в областях  $E$ ,  $F_1$  и  $F_2$  ионосферы. Знание концентраций ионов  $N_2^+$  и  $N^+$  и их распределения по высоте позволило сделать более определенные заключения о причинах ионизации молекулярного азота <sup>(6)</sup>, чем имевшиеся до сих пор <sup>(7)</sup>.

В настоящей статье суммируются результаты масс-спектрометрических измерений на ракетах и третьем спутнике, проведенные в 1958 и 1960 гг.,

\* Из опубликованных материалов <sup>(2)</sup> видно, что ионы с  $M = 28^+$  регистрировались почти на пределе чувствительности прибора, причем данные, полученные на восходящей и нисходящей ветвях траектории, существенно образом отличались друг от друга. Это же в еще большей степени относится и к ионам с массовым числом  $M = 14^+$ , отождествляемым с ионами атомарного азота  $N^+$ . Исключением является ночной пуск ракеты 8 VII 1955 г. до высоты 115 км, в котором ионы с  $M = 28^+$  оказались единственными, зарегистрированными как на восходящей, так и на нисходящей ветвях траектории <sup>(5)</sup>.

в части обнаружения и измерения распределения по высоте ионов молекулярного и атомарного азота. В измерениях 1958 г. использовался 7—5-цикло-  
вый радиочастотный масс-спектрометр РМС-1<sup>(8)</sup>; результаты 1960 г. полу-  
чены с более чувствительным радиочастотным масс-спектрометром МХ-6403.

Подробное описание методики эксперимента и некоторых результатов  
можно найти в статьях<sup>(1,3,4,8)</sup>. Измерения проводились на отделяемом от  
ракеты и неориентированном контейнере. В результате достигалась мак-  
симально возможная чистота эксперимента, хотя отсутствие ориентации  
являлось в некотором отношении мешающим фактором. В области высот  
100—160 км, где скорость контейнера превышала или была сравнима со сред-

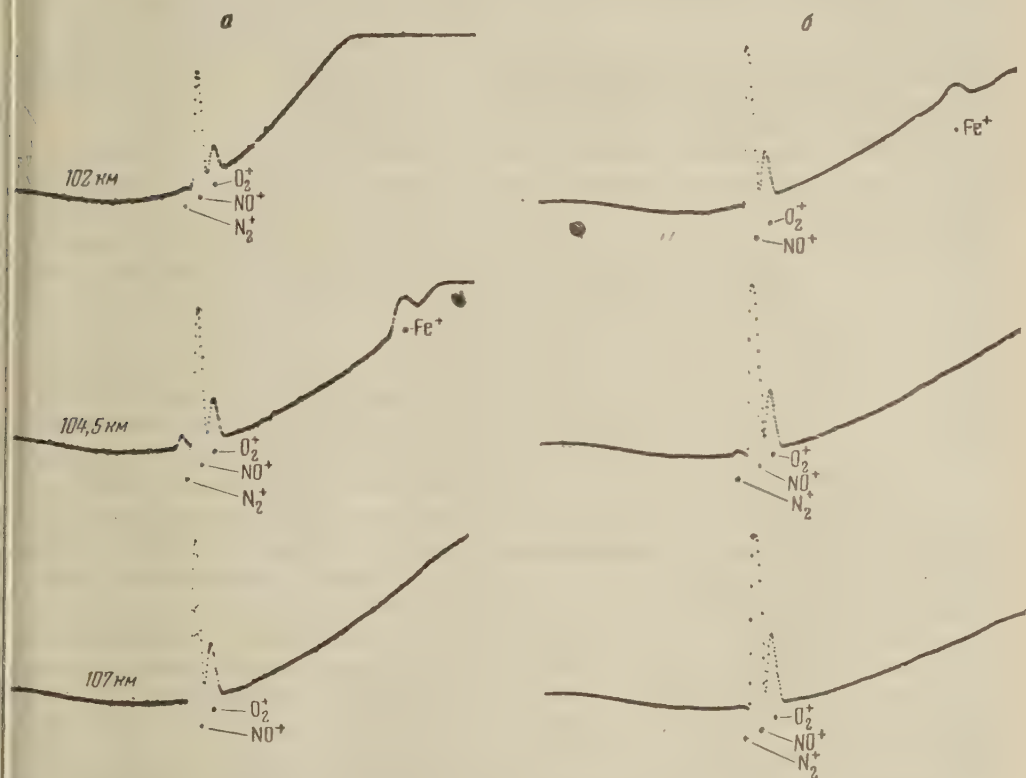


Рис. 2. Массовые спектры, показывающие существование тонких слоев положительных ионов  $N_2^+$  и  $Fe^+$  в атмосфере, в пуске ракеты 2 VIII 1958 г. (канал высокой чувствительности): а — восходящая ветвь, б — нисходящая ветвь

ними тепловыми скоростями ионов, чувствительность масс-спектрометра  
существенно зависела от ориентации входного отверстия прибора относи-  
тельно вектора скорости. В силу этого на высотах 100—120 км, где имеются  
тонкие слои нехарактерных для азотно-кислородной атмосферы ионов  $Mg^+$ ,  
 $Ca^+$ <sup>(9)</sup> и  $Fe^+$  и где, как будет показано ниже, обнаружены ионы  $N_2^+$ , изме-  
рения не всегда были возможны, так как ориентация контейнера не обяза-  
тельно была оптимальной. Обнаружение тонкого слоя ионов  $N_2^+$  затруднял так-  
же сравнительно большой период развертки по массам\* и в некоторых  
случаях недостаточная чувствительность приборов. По указанным при-  
чинам лишь сопоставление результатов двух ракетных экспериментов  
(2 VIII 1958 г. и 15 VI 1960 г.) и данных третьего спутника (май 1958 г.)  
позволило сделать определенные выводы о распределении ионов  $N_2^+$  в ат-  
мосфере.

\* Для РМС-1 период развертки по массам равнялся 1,7 сек., что соответствовало изме-  
нению высоты  $\Delta H = 2$  км, для МХ-6403 период развертки 3 сек.,  $\Delta H = 4$  км.

При обработке были сделаны следующие предположения: 1) сумма концентраций положительных ионов равна электронной концентрации, т. е. отрицательные ионы отсутствуют:  $\Sigma [M^+] = n_e$ ; 2) сумма амплитуд ионных пиков на масс-спектрограмме пропорциональна суммарной концентрации положительных ионов  $\Sigma i_{M^+} = k \Sigma [M^+]$ ; 3) отношение амплитуд ионных пиков в спектре равно отношению концентраций соответствующих ионов в атмосфере:  $i_{M_1^+} / i_{M_2^+} = [M_1^+] / [M_2^+]$ . Абсолютная концентрация иона с массовым числом  $M_1^+$  находилась таким образом из соотношения  $[M_1^+] = i_{M_1^+} n_e / \Sigma i_{M^+}$ .

Значения электронной концентрации брались с профилей, полученных методом ультракоротковолнового радиоинтерферометра 27 VIII 1958 г. <sup>(10)</sup> в сходных условиях, а 15 VI 1960 г. — на той же ракете.

На рис. 1 изображены абсолютные концентрации ионов  $N_2^+$  и  $N^+$  в функции высоты. Измеренные значения концентрации  $N_2^+$  удовлетворительно согласуются с определенными по данным абсолютной фотометрии эмиссии  $\lambda 3914 \text{ \AA}$  в полярных сияниях, освещенных Солнцем <sup>(11)</sup>.

В распределении ионов  $N_2^+$  имеется одна интересная особенность, отличающая их от остальных, характерных для азотно-кислородной атмосферы Земли ионов ( $NO^+$ ,  $O_2^+$ ,  $O^+$ ,  $N^+$ ). В области *E* на высотах 100—120 км имеется второй, гораздо более тонкий слой ионов  $N_2^+$  с такой же (порядка  $10^4 \text{ см}^{-3}$ ) концентрацией, что и основной максимум их в области *F*. Реальность существования таких слоев доказывают рис. 2. и рис. 3.

Рис. 3. То же, что рис. 2 в пуске ракеты 15 VI 1960 г. (каналы средней и высокой чувствительности, только восходящая ветвь траектории)

Вопрос о причинах ионизации молекулярного азота в земной атмосфере до настоящего времени окончательно не решен. В свете соображений, изложенных в работе <sup>(7)</sup>, и учитывая новые данные о поглощении линии He II  $\lambda 304 \text{ \AA}$  <sup>(12)</sup>, согласно которым это излучение, способное ионизовать молекулу азота, поглощается в диапазоне высот от 210 км (оптическая толщина  $\tau_s = 0,1$ ) до 150 км ( $\tau = 1$ ), представляются убедительными доводы А. Д.

Данилова, объясняющего ионизацию молекулярного азота реакцией перезарядки с ионами атомарного азота:  $N_2 + N^+ \rightarrow N_2^+ + N^*$  <sup>(6)</sup>. Это, безусловно, должно быть справедливо для области высот 250 км и выше. Вместе с тем очевидно, что возникновение ионов  $N_2^+$  в области *E* на высотах 100—120 км не может быть приписано ни прямой фотоионизации  $N_2$  (нет квантов соответствующего излучения), ни реакции перезарядки (нет ионов  $N^+$ ).

Таким образом, появление ионов трудноионизируемой атмосферной компоненты — молекулярного азота — в области *E* служит указанием на какие-то иные, не связанные с солнечным излучением процессы ионизации. Ключом к пониманию существа этих процессов и природы ионизирующего агента служит ионный состав, регистрируемый на данных высотах. Как видно из рис. 2, на масс-спектрограммах от 2 VIII 1958 г. вместе с ионами  $N_2^+$  регистрируются ионы с  $M = 56^+$ , которые следует отождествить с ионами железа  $Fe^+$ . Их максимальная концентрация того же порядка, что и для  $N_2^+$ , и составляет  $1,2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$  на высотах 103—105 км. В пуске 15 VI 1960 г. на этих же высотах были найдены ионы магния  $Mg^+$  и кальция  $Ca^+$  с отношением концентраций, близким к отношению числа атомов названных элементов в метеоритах <sup>(9)</sup>, что явилось аргументом в пользу метеорной гипотезы их происхождения. Максимальная концентрация ионов  $Mg^+$  составляла  $1,4 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$  на высоте 104 км. Из рис. 3 видно, что в этом же пуске на высоте 120 км ионы  $N_2^+$  появляются также вместе с ионами  $Mg^+$ . Высоты появления «нехарактерных» для данной области атмосферы ионов  $Mg^+$ ,  $N_2^+$ ,  $Ca^+$  и  $Fe^+$  специфичны для метеорных явлений. В области 100—120 км как раз теряют свои космические скорости и испаряются полностью или частично (а значит, приносят максимальный вклад как с точки зрения энергии, так и с точки зрения количества вещества, вносимого в атмосферу) самые мелкие из имеющихся по современным представлениям метеорные частицы <sup>(13)</sup>.

Из сказанного следует, что наблюдаемая ионизация  $N_2^{+*}$  в области 100—120 км, по крайней мере в средних широтах\*\*, может быть объяснена метеорной деятельностью — ионизацией атмосферы быстролетящими испарившимися атомами метеорного вещества. Наряду с этим, происходит также ионизация испарившихся атомов  $Mg$ ,  $Ca$  и  $Fe$  самого метеорного вещества при их взаимодействии с молекулами атмосферы. Очевидно, что ночная ионизация в области *E* целиком может объясняться метеорной деятельностью, так как электронная концентрация ночью составляет там  $\sim 10^4 \text{ см}^{-3}$  <sup>(14)</sup>, что совпадает по порядку величины с зарегистрированными ионными концентрациями.

Институт прикладной физики  
Академии наук СССР

Поступило  
21 XII 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> В. Г. Истомин, Сборн. Искусственные спутники Земли, в. 2, Изд. АН СССР 1958, стр. 32. <sup>2</sup> С. У. Johnson et al., App. de Geophys., 14, № 4, 475 (1958). <sup>3</sup> В. Г. Истомин, ДАН, 129, № 1, 81 (1959). <sup>4</sup> В. Г. Истомин, Сборн. Искусственные спутники Земли, в. 7, Изд. АН СССР, 1961. <sup>5</sup> С. У. Johnson, J. P. Herriger, J. Geophys. Res., 60, 533 (1955). <sup>6</sup> А. Д. Данилов, ДАН, 137, № 5 (1961); Сборн. Искусственные спутники Земли, в. 7, 1961. <sup>7</sup> J. W. Chamberlain, C. Sagan, Planet. Space Sci., 2, № 2—3, 157 (1960). <sup>8</sup> В. Г. Истомин, Сборн. Искусственные спутники Земли, в. 3, 1959, стр. 98. <sup>9</sup> В. Г. Истомин, ДАН, 136, № 5 (1961). <sup>10</sup> К. И. Грингауз, В. А. Рудаков, ДАН, 132, № 6 (1960). <sup>11</sup> M. H. Röss, J. Atm. Terr. Phys., 14, 338 (1959). <sup>12</sup> H. E. Hinteregger et al., COSPAR, Nice, 1960. <sup>13</sup> Б. Ю. Левин, Физическая теория метеоров и метеорное вещество в солнечной системе, Изд. АН СССР, 1956; Б. А. Миртов, Сборн. Искусственные спутники Земли, в. 4, 1960, стр. 118. <sup>14</sup> С. К. Митра, Верхняя атмосфера, ИЛ, 1955.

\* Масса  $M = 28^+$  может быть отождествлена, кроме того, с  $Fe^{2+}$  или  $Si^+$ , что не противоречит предлагаемой гипотезе.

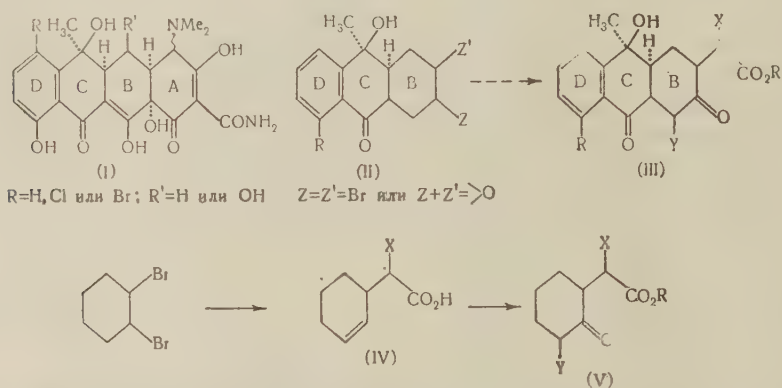
\*\* В работе <sup>(6)</sup> есть указание на наличие относительно большого количества ионов с  $M = 28^+$  на высоте 105 км, зарегистрированных масс-спектрометром в ночном пуске ракеты в Арктике во время полярного сияния.

Ю. А. АРБУЗОВ, А. А. КИРЮШКИН, М. Н. КОЛОСОВ, Ю. А. ОВЧИННИКОВ  
и академик М. М. ШЕМЯКИН

# ИЗУЧЕНИЕ ПУТЕЙ ПОСТРОЕНИЯ КОЛЬЧАТОЙ СИСТЕМЫ ВА ТЕТРАЦИКЛИНОВ

## СИНТЕЗ ЭФИРОВ ЗАМЕЩЕННЫХ 2-КЕТОЦИКЛОГЕКСИЛУКСУСНЫХ КИСЛОТ

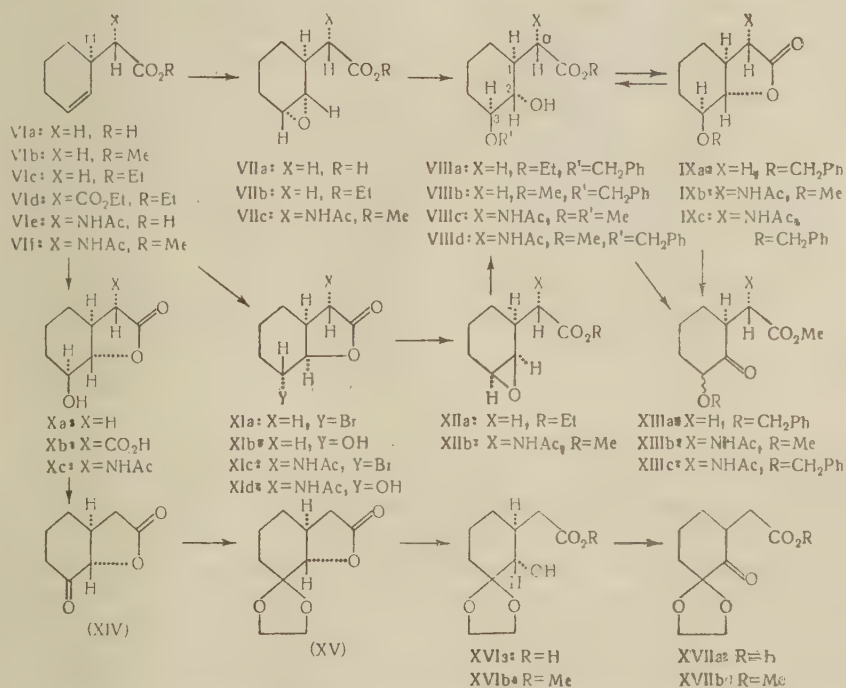
В связи с проблемой полного синтеза тетрациклинов (I) нами на модельных соединениях было предпринято изучение возможных путей перехода от описанных ранее (1) гидроантраценовых дибромидов и эпоксидов (II) к трициклическим соединениям типа (III), имеющим такие заместители X и Y, которые можно было бы впоследствии превратить соответственно в диметиламиногруппу и кетонный карбонил. С этой целью из 1,2-дибромциклогексана через ненасыщенную кислоту (IV, X = NHAc) был получен первый представитель соединений типа (V) — 3-бром-2-кетоциклогексил-ацетуровый эфир (V, X = NHAc, Y = Br) (2). В развитие этих исследований сейчас нами осуществлен синтез ряда других соединений типа (V), а именно кетоэфиров (XIIIa) — (XIIIc) и (XVIIb), которым и посвящено настоящее сообщение.



Эпоксидированием этилового эфира 2-циклогексенилуксусной кислоты (VIc) посредством  $\text{PhCO}_3\text{H}$  в хлороформном растворе был получен с выходом 85% 2,3- $\alpha$ -эпоксициклогексилуксусный эфир (VIIb). Стереизомерный  $\beta$ -эпоксиэфир (XIIa) образуется с почти количественным выходом при действии 0,5 N этанольного раствора KOH на бромлактон (XIa), который в свою очередь получается при бромировании 2-циклогексенилуксусной кислоты (VIa) в содовом растворе (2, 3). Оба изомерных эпоксиэфира — (VIIb) и (XIIa) — при действии бензилового спирта в присутствии  $\text{BF}_3$  при 20° дали один и тот же оксibenзилоксиэфир (VIIIа). Последний, правда, не удалось выделить в индивидуальном состоянии, так как он частично лактонизовался при перегонке. Однако после омыления этого оксibenзилоксиэфира легко был получен с выходом 70% чистый бензилоксилактон (IXa), который действием метанольного KOH, а затем  $\text{AgNO}_3$  и MeI был превращен в оксibenзилоксиэфир (VIIIb) (выход 76%).

Аналогичным путем эпоксиэфиры (VIIc) и (XIIb), синтезированные нами ранее из непердельного эфира (VIb) и бромлактона (XIc) <sup>(2)</sup>, были превращены действием PhCH<sub>2</sub>OH в присутствии BF<sub>3</sub> или H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> в оксibenзилокси-эфиры (VIIId), очищенный через лактон (IXc). Метанолизом тех же эпокси-эфиров (VIIc) и (XIIb) был получен (с выходами 94 и 80%) оксиметоксиэфир (VIIIc).

Окисление оксиалкоксииэфиров (VIII) до алкоксикетозэфиров (XIII) представило известные трудности вследствие значительной экранированности гидроксильной группы в исходных соединениях и заметной склонности образующихся эфиров ацилоинов к гидролизу под влиянием кислот и щелочей. В связи с этим реакция была предварительно изучена на примере транс-2-бензилоксициклогексанола, причем оказалось, что рекомендованные Муссероном <sup>(4)</sup> условия окисления (H<sub>2</sub>CrO<sub>4</sub> в сернокислотном растворе) дают неудовлетворительные результаты (выход около 15%), тогда как при применении в качестве окислителя CrO<sub>3</sub> в пиридине (20°, 24 часа) выход 2-бензилоксициклогексанона, выделяемого в виде семикарбазона, достигает 50%\*. При окислении этим способом оксифэфиров (VIIlb) — (VIIId) с выходом 60—80% были получены соответственно кетозэфиры (XIIIa) — (XIIIc).



Синтез кетальлактона (XV), необходимого для получения кеталькетозэфира (XVIIb), был осуществлен исходя из 2-циклогексенилмалонового эфира (VIId) по описанной ранее схеме <sup>(6)</sup> через (Xb), (Xa) и (XIV), причем видоизменение методики, заключающееся в декарбоксилировании промежуточного карбоксилактона (Xb) в кипящем пиридине, позволило впервые получить транс-оксидекактон (Xa) в кристаллическом виде. Прямое окисление кетальлактона (XV) при помощи Mg(OBr)<sub>2</sub> по способу Мак-Рея <sup>(7)</sup> привело к кетокислоте (XVIIa), однако выход последней, в отличие от данных Розенмунда <sup>(6)</sup>, не превышал 15%. Поэтому лактон (XV) был сначала омылен до соответствующей оксикислоты (XVIa), которая затем была превращена действием CH<sub>2</sub>N<sub>2</sub> или метилированием ее Ag-соли посредством CH<sub>3</sub>J

\* 2-Бензилоксициклогексанон был также синтезирован нами с выходом 45% этерификацией адипоина бензиловым спиртом в присутствии HCl (ср. <sup>(5)</sup>).

в метиловый эфир (XVIb). Окисление этого эфира ди-трет.-бутилхроматом привело с выходом 55% к кеталькетозэфиру (XVIIb), полученному также метилированием кислоты (XVIIa) при помощи  $\text{CH}_2\text{N}_2$ .

Строение соединений, описанных в настоящей статье (их константы и данные анализа приведены в таблице), было установлено следующим образом. При алкоголизе  $\alpha$ -эпоксиэфира (VIIc) метиловым или бензиловым спиртом в присутствии соответствующих алкоголятов были получены

Таблица 1

Соединение	Т. пл. (разл.), т. кип., растворитель для кристаллизации	Найдено, %			Вычислено, %		
		C	H	N	C	H	N
VIb	80—81°/10 мм	70,31	9,29		70,10	9,15	
VIc	85—86°/10 мм	71,22	9,72		71,39	9,59	
VIIa	S-бензилтиурониевая соль: 153—154° (EtOH)	59,22	6,91		59,60	6,88	
VIIIb	92—93°/1 мм	65,18	8,90		65,19	8,75	
VIIIb	165—167°/1 мм	69,37	7,81		69,04	7,97	
VIIIc	113—114° (AcOEt—Et <sub>2</sub> O)	55,59	8,26	5,52	55,58	8,16	5,40
VIIIc	41—42° (AcOEt—Et <sub>2</sub> O)	64,28	7,47	4,23	64,46	7,51	4,18
IXa	173—175°/1 мм	72,92	7,43		73,14	7,37	
IXb	147—148° (AcOEt—MeOH)	57,92	7,55	6,01	58,13	7,54	6,16
IXc	68—69° (AcOEt—Et <sub>2</sub> O)	67,29	7,06	4,66	67,31	6,98	4,62
Xa	39—40° (Et <sub>2</sub> O)	61,23	7,74		61,52	7,75	
Xc	3,5-Динитробензоат: 112—113° (EtOH)	51,48	4,15		51,43	4,03	
	167—168° (AcOEt)	56,32	7,14	6,66	56,32	7,09	6,50
	3,5-Динитробензоат: 230—231° (EtOH)	49,84	4,32	10,15	50,12	4,21	10,32
XIa	58—59° (Et <sub>2</sub> O—гексан)	43,85	5,06		44,06	5,15	
XIIa	87—88°/1 мм	64,93	8,75		65,19	8,75	
XIIIa	148—150°/0,5 мм	69,46	7,35		69,54	7,30	
	Семикарбазон: 139—140° (MeOH)	60,98	6,97	12,95	61,24	6,95	12,61
XIIIb	71—73° (AcOEt—Et <sub>2</sub> O)	55,88	7,41	5,71	56,02	7,44	5,40
XIIIc	59—60° (AcOEt)	65,19	7,19	4,25	64,85	6,95	4,20
XVIb	135—137°/1 мм	57,69	7,59		57,38	7,88	
XVIIb	63—64° (MeOH)	57,56	7,04		57,88	7,07	

те же самые оксиалкоксииэфиры (VIIIc) и (VIIId), которые образуются при взаимодействии эпоксиэфира (VIIc) с MeOH или PhCH<sub>2</sub>OH под влиянием BF<sub>3</sub> или H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>. Между тем известно, что катализируемый щелочами алкоголиз эпоксидов представляет собой реакцию S<sub>N</sub>2, тогда как кислотный алкоголиз может протекать и по карбониевому механизму<sup>(9)</sup>. Поэтому представлялось вероятным, что оксиалкоксииэфиры (VIII) получаются из  $\alpha$ -эпоксидов (VII) в результате атаки алкоксийного аниона в положение 3 $\beta$  (наименьшее экранирование) с сохранением конфигурации C<sub>2</sub>, в то время как образование этих же соединений из  $\beta$ -эпоксидов (XII) связано с инверсией асимметрического центра 2. Справедливость такого предположения была затем строго доказана гидрогенолизом бензилоксилактонов (IXa) и (IXc) до транс-оксилактонов (Xa) и (Xc), которые были синтезированы ранее<sup>(2,6)</sup> наряду с соответствующими цис-изомерами (XIb) и (XId) путем гидроксирования ненасыщенных кислот (VIa) и (VIe) с помощью HCO<sub>2</sub>H. Таким образом, оксиалкоксииэфиры (VIII) обладают цис-расположением заместителей при асимметрических центрах 1 и 3, причем эти заместители, по-видимому, находятся в термодинамически наиболее устойчивой 1,3-цис-диэкваториальной конформации. Очевидно, та же конформация должна сохраниться и в конечных кетозэфирах, вследствие чего для них наиболее вероятно пространственное строение (XIII).

\* Вопреки литературным данным<sup>(6)</sup> оксикетали этого типа, например этиленкеталь адипина, могут быть с удовлетворительным выходом окислены комплексом CrO<sub>3</sub>·2Py. Однако еще лучшие результаты получаются при применении для этой же цели трет.-Bu<sub>2</sub>CrO<sub>4</sub>.

Структура и конфигурация бромлактона (XIa) были доказаны восстановительным дегалогенированием этого соединения в присутствии PdO или скелетного Ni до ранее известного лактона цис-2-оксициклогексилуксусной кислоты (<sup>10</sup>); естественно, цис-сочленение лактонного и циклогексанового колец в соединении (XIa) обуславливает  $\beta$ -конфигурацию оксидного цикла в эпоксиэфире (XIIa). Что касается строения остальных соединений, то оно не нуждается в специальных пояснениях.

Таким образом, нами осуществлен синтез ряда новых кетоэфиров типа (V), которые могут служить для построения бициклической системы ВА тетрациклинов с использованием различных реакций присоединения по кетонной группе (этинилирование, циангидринный синтез, реакция Нормана и т. п.).

Институт химии природных соединений  
Академии наук СССР

Поступило  
13 I 1961

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

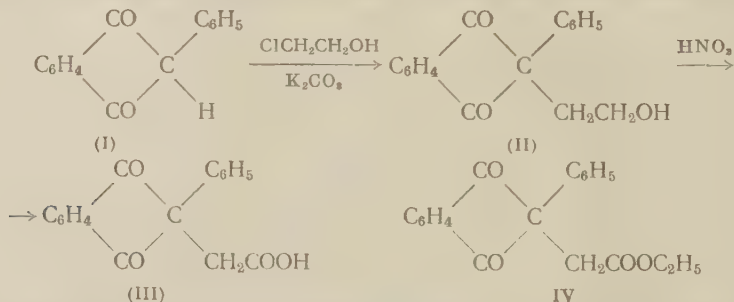
- <sup>1</sup> М. М. Шемякин, М. Н. Колосов и др., ДАН, 128, 113 (1959). <sup>2</sup> М. М. Шемякин, Ю. А. Арбузов и др., ДАН, 133, 1121 (1960). <sup>3</sup> Ю. А. Арбузов, М. Н. Колосов и др., Изв. АН СССР, ОХН, 1961, 377. <sup>4</sup> M. Mousseron, R. Jacquier, A. Fontaine, Bull. Soc. chim. France, 1952, 767. <sup>5</sup> A. Kötz, K. Blendermann et al., Lieb. Ann., 400, 47 (1913). <sup>6</sup> K. W. Rosenmund, G. Kositzke, Chem. Ber., 92, 486 (1959). <sup>7</sup> I. A. McRae, E. H. Charlesworth, D. S. Alexander, Canad. J. Res., 21B, 1 (1943). <sup>8</sup> R. H. Jaeger, H. Smith, J. Chem. Soc., 1955, 160. <sup>9</sup> R. E. Parker, N. S. Isaacs, Chem. Rev., 59, 737 (1959). <sup>10</sup> M. S. Newman, C. A. Vanderwerf, J. Am. Chem. Soc., 67, 233 (1945); I. H. Brewster, C. H. Kucera, J. Am. Chem. Soc., 77, 4564 (1955).

А. К. АРЕН, Я. Я. ДРЕГЕРИС и академик АН ЛатвССР Г. Я. ВАНАГ

### 2-β-ОКСИЭТИЛ-2-ФЕНИЛИНДАНДИОН-1,3

Некоторые 2-замещенные индандионы-1,3 являются хорошими антикоагулянтами крови. Так, например, 2-фенилиндандион-1,3 (I) под названием «фенилин» уже вошел в медицинскую практику и признан лучшим антикоагулянтом крови, чем применяемый до сих пор в СССР дикумарин (1-3). Активными антикоагулянтами крови являются также 2-анизилиндандион-1,3 (4), 2-нафтилиндандион-1,3 (5,6) и особенно 2-дифенилацетилиндандион-1,3 («дифенацин») (7,8). Высказано мнение (9), что антикоагуляционное действие препаратов ряда оксикумарина и индандиона-1,3 связано с их способностью енолизироваться. Однако одному из нас вместе с М. Н. Коптеловой (10) удалось показать, что замена активного водорода в фенилиндандионе на хлор, бром, нитрогруппу и оксиметильную группу существенно не снижает его антикоагуляционную активность. Из этих производных 2-оксиметил-2-фенилиндандион-1,3 под названием «омефин» предложен для клинической практики (11). Поэтому представляло интерес приготовить и следующий гомолог — 2-β-оксиэтил-2-фенилиндандион-1,3 (II).

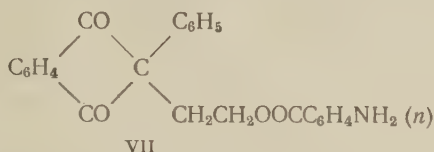
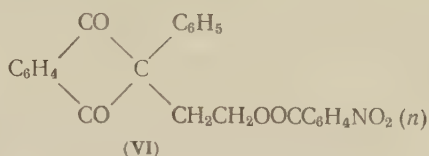
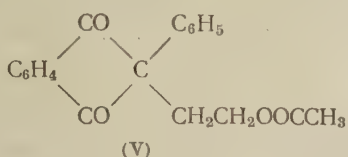
Алкилирование 2-фенилиндандиона-1,3 в положении 2 обычно осуществляется действием галогенида на соль 2-фенилиндандиона-1,3 (12,13). Оксиприлирование 2-фенилиндандиона-1,3 мы проводили без приготовления его соли, просто продолжительным нагреванием 2-фенилиндандиона-1,3 с избытком этиленхлоргидрина в присутствии поташа при 140°. Замена избытка этиленхлоргидрина спиртами не дала удовлетворительных результатов.



Полученный 2-β-оксиэтил-2-фенилиндандион-1,3 (II) представляет собой белое кристаллическое вещество с т. пл. 154°. Его окисление азотной кислотой дало соответствующую кислоту: 2-карбоксиметил-2-фенилиндандион-1,3 или 2-фенилиндандионил (2)-уксусную кислоту (III). Через хлорангидрид этой кислоты приготовлен ее этиловый эфир (IV). Как этот эфир, так и сама кислота уже описаны в литературе, хотя и получены другим путем.

При кипячении с уксусным ангидридом 2-β-оксиэтил-2-фенилиндандион-1,3 дает соответствующий ацетат (V), т. пл. 77°. Аналогично с *n*-нитробензоилхлоридом получен *n*-нитробензоат (VI). Его восстановление дало *n*-аминобензоат (VII). Это — аналог анестезина, в котором β-водород этильной группы заменен на фенилиндандионовый остаток. Вещество довольно нестабильно, при действии минеральных кислот становится коричневым, видно вследствие легко идущей поликонденсации между ароматической

аминогруппой; и карбонильной группой, что замечено и для других аналогичных производных (14).



По предварительным результатам, 2-β-оксиэтил-2-фенилиндандион-1,3, в отличие от 2-β-оксиметил-2-фенилиндандиона-1,3, антикоагуляционными свойствами не обладает.

### Экспериментальная часть

**2-β-Оксиэтил-2-фенилиндандион-1,3.** 50 г (0,225 моля) 2-фенилиндандиона-1,3, 47 г (0,350 моля) карбоната калия и 62 мл (0,923 моля) этиленхлоргидрина нагревают на масляной бане при 140° (температура бани). Полученный красный раствор выливают в воду, выпавший осадок отделяют, промывают раствором соды и кристаллизуют из 120 мл спирта. Выход 42 г (70%) 2-β-оксиэтил-2-фенилиндандиона-1,3. Белые кристаллы, т. пл. 154°. Хорошо растворяется в бензоле, спирте, этилацетате, дихлорэтано, хлороформе и эфире. В концентрированной серной кислоте растворяется с фиолетовой окраской.

Найдено %: С 77,00; Н 5,30  
 $\text{C}_{17}\text{H}_{14}\text{O}_3$ . Вычислено %: С 76,68; Н 5,26

Подкислением красного водного фильтрата после отделения 2-β-оксиэтил-2-фенилиндандиона-1,3 соляной кислотой получено обратно 2,5 г непрореагировавшего 2-фенилиндандиона-1,3 (т. пл. 146°), так что общий выход 2-β-оксиэтил-2-фенилиндандиона-1,3, считая на вошедший в реакцию фенилиндандион-1,3, составляет 73,5% теоретического.

**2-Карбоксиметил-2-фенилиндандион-1,3 (III).** 5,32 г 2-β-оксиэтил-2-фенилиндандиона-1,3 кипятят с 50 мл азотной кислоты ( $d = 1,35$ ) до окончания выделения окислов азота и разбавляют водой. Осадок несколько раз кристаллизуют из бензола. Выход 1,68 г (30%) 2-карбоксиметил-2-фенилиндандиона-1,3 или 2-фенилиндандионил(2)-уксусной кислоты. Белые кристаллы, т. пл. 214—215°, по литературе (13) 214—215°. Хорошо растворяется в спирте, диоксане, ледяной уксусной кислоте, в бикарбонате натрия.

Найдено %: С 72,91; Н 4,48  
 $\text{C}_{17}\text{H}_{12}\text{O}_4$ . Вычислено %: С 72,85; Н 4,32

**Аммониевая соль.** 2,8 г кислоты III растворяют в 10 мл аммиака, выпаривают досуха и остаток кристаллизуют из спирта с добавлением эфира. Выход 2,1 г (75%) аммониевой соли. Белые кристаллы, т. пл. 175° (разл.). Соль хорошо растворяется в воде; подкислением раствора выделяется обратно кислота III.

Найдено %: N 4,57  
 $\text{C}_{17}\text{H}_{15}\text{O}_4\text{N}$ . Вычислено %: N 4,71

Этиловый эфир. 2,8 г кислоты III и 11,9 хлористого тионила кипятят 30 мин. и по охлаждении выливают в 10 мл. спирта. Полученный раствор разбавляют 50 мл воды, и выпавший осадок перекристаллизовывают из спирта. Выход 2,34 г (76%) этилового эфира кислоты III. Т. пл. 105—106°, что отвечает литературным данным (104°) (12). Хорошо растворяется в спирте, бензоле, диоксане.

Ацетат-2-β-оксиэтил-2-фенилиндандиона-1,3 (V). 2,66 г 2-β-оксиэтил-2-фенилиндандиона-1,3 и 20 мл уксусного ангидрида кипятят 30 мин. Охлажденный раствор выливают в воду. После разложения уксусного ангидрида осадок 2 раза кристаллизуют из спирта. Выход 2,93 г (77%) ацетата 2-β-оксиэтил-2-фенилиндандиона-1,3. Белые кристаллы, т. пл. 77°. Хорошо растворяется в бензоле, метаноле, этаноле и ледяной уксусной кислоте.

Найдено %: С 74,47; Н 5,09  
C<sub>19</sub>H<sub>16</sub>O<sub>4</sub>. Вычислено %: С 74,01; Н 5,23

*n*-Нитробензоат-2-β-оксиэтил-2-фенилиндандиона-1,3 (VI). 2,66 г (0,01 моля) 2-β-оксиэтил-2-фенилиндандиона-1,3, 2,04 г (0,011 моля) *n*-нитробензоилхлорида в 20 мл сухого бензола кипятят 5 час. Выпавшие кристаллы перекристаллизовывают из смеси спирта с диоксаном. Выход 2,49 г (50%) *n*-нитробензоата 2-β-оксиэтил-2-фенилиндандиона-1,3. Белые кристаллы, т. пл. 156°. Хорошо растворяется в ледяной уксусной кислоте, диоксане, плохо — в метаноле, этаноле, бензоле.

Найдено %: N 3,58  
C<sub>24</sub>H<sub>17</sub>O<sub>6</sub>N. Вычислено %: N 3,37

*n*-Аминобензоат 2-β-оксиэтил-2-фенилиндандиона-1,3 (VII). К раствору 4,154 г *n*-нитробензоата 2-β-оксиэтил-2-фенилиндандиона-1,3 в 40 мл ледяной уксусной кислоты прибавляют цинковой пыли и кипятят, время от времени прибавляя новые порции цинковой пыли, в целом 6,4 г. Раствор сначала становится желто-бурым, затем обесцвечивается. По окончании реакции фильтрат разбавляют водой, белый осадок отделяют и хорошо промывают водой. Выход 3,81 г (98%) *n*-аминобензоата 2-β-оксиэтил-2-фенилиндандиона-1,3, т. пл. 97—100° (разл.). Хорошо растворяется в метаноле, этаноле, не растворяется в дихлорэтаноле и четыреххлористом углероде. При повышенной температуре, а также под влиянием минеральных кислот легко изменяется и темнеет. Перекристаллизовать не удалось.

Найдено %: N 3,73  
C<sub>24</sub>H<sub>19</sub>O<sub>4</sub>N. Вычислено %: N 3,64

Рижский политехнический институт

Поступило  
13 I 1961

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

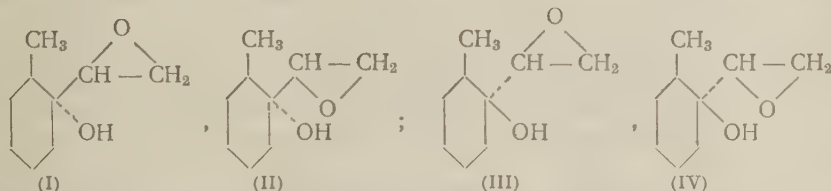
- <sup>1</sup> Г. Я. Ванаг, С. А. Гиллер и др., Фармакол. и токсикол., № 6, 23 (1956).  
<sup>2</sup> А. Н. Филатов, Хирургия, № 1, 43 (1958). <sup>3</sup> З. Д. Блексмит, М. А. Котовщикова, Н. В. Мартынова, Вестн. хирургии, № 8, 64 (1958). <sup>4</sup> K. Lange et al., Am. Heart. J., 55, № 1, 73 (1958). <sup>5</sup> J. Maj, J. Sieroslawska, M. Eckstein, Dissert. pharmac., PAN, 8, 289 (1956). <sup>6</sup> Р. Нгнџиар, L. Krasnes, N. Furdick, Chem. zvesti, 10, 12 (1956). <sup>7</sup> J. F. Corell, L. L. Coleman, S. Long, R. J. Willy, Proc. Soc. Exptl. Biol. and Med., 80, 139 (1952). <sup>8</sup> М. А. Котовщикова, З. Д. Блексмит, Актуальные вопросы переливания крови, № 6, 208 (1958). <sup>9</sup> Р. Menuier, Ch. Menizer, D. Molho, C. R., 224, 1666 (1947). <sup>10</sup> Г. Я. Ванаг, М. Н. Коптелова, Изв. АН ЛатвССР, № 8, 93 (1958).  
<sup>11</sup> Наука — производству, в. 5, Рига, 1960, стр. 65. <sup>12</sup> F. Nathanson, Ber., 26, 2376 (1893). <sup>13</sup> D. Radulescu, Ch. Gheorgiu, Ber., 60, 186 (1927). <sup>14</sup> Г. Ванаг, Т. Думпис, Л. Зутере, Изв. АН ЛатвССР, № 6, 73 (1960).

М. И. БАТУЕВ, А. А. АХРЕМ и А. Д. МАТВЕЕВА

# ОПТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНФОРМАЦИЙ 2-МЕТИЛ-1-ОКСИЦИКЛОГЕКСИЛЭТИЛЕНОКСИДОВ

(Представлено академиком Б. А. Арбузовым 28 XI 1960)

При окислении цис-2-метил-1-винилциклогексанола перуксусной кислотой в хлороформе одним из нас <sup>(1)</sup> были выделены два глицидных спирта с цис-конфигурацией, а при окислении транс-2-метил-1-винилциклогексанола — два глицидных спирта с транс-конфигурацией (реакции протекают с сохранением конфигурации при асимметрическом центре). Было предположено, что в каждой паре спирты различаются между собой по пространственному положению окисного цикла и являются диастереоизомерами, т. е. что были получены следующие четыре глицидных спирта: (I) цис-эритро-(2-метил-1-оксициклогексил)-этиленоксид, (II) цис-трео-(2-метил-1-оксициклогексил)-этиленоксид, (III) транс-эритро-(2-метил-1-оксициклогексил)-этиленоксид, (IV) транс-трео-(2-метил-1-оксициклогексил)-этиленоксид:





Все четыре спирта имеют весьма различные температуры плавления: один из спиртов цис-ряда имеет т. пл. 43—43,5°, другой — жидкий (его т. кип. 89—90° (7 мм)); один из спиртов транс-ряда имеет т. пл. 75—75,5°, другой — 40,5—41°.\*

Исследование спектров комбинационного рассеяния света полученных глицидных спиртов дает возможность продолжить выяснение вопроса об их строении. Это исследование показало, что гидроксильная группа у всех четырех спиртов в жидком состоянии включена в водородную связь с атомом кислорода окисного цикла: частота O—H размыта в полосу (см. табл. I). У двух транс-изомеров полоска эта существенно различна: у изомера с более низкой температурой плавления (40,5—41°) она узкая ( $\sim 45$  см<sup>-1</sup>), лишь со слабым по интенсивности размывом ее в сторону низких частот; у изомера с более высокой температурой плавления (75—75,5°) она более широкая ( $\sim 200$  см<sup>-1</sup>) и сравнительно одинаковой интенсивности по всей ширине. Это указывает <sup>(3)</sup> на безусловное преобладание у первого из двух транс-изомеров внутримолекулярной водородной связи, а у другого — межмолекулярной, т. е. что первый является соединением (IV) (с т. пл. 40,5—41°), другой — соединением (III) (с т. пл. 75—75,5°). По-видимому, именно это различие в типах водородной связи существенным образом сказывается в данном случае на различиях в температурах плавления. Если этим же обуславливается большое различие в температурах плавления двух глицидных спиртов цис-ряда, то тогда один из этих спиртов с более высокой температурой плавления, также в данном случае обусловленной межмолекулярной водородной связью, является соединением (I) (с т. пл. 43—43,5°), а другой — жидкий с внутримолекулярной водородной связью — соединением (II). Оптические данные подтверждают это: у (II) с высокочастотной стороны полосы O—H резко выделяется и даже несколько отделена от осталь-

\* Исследование ядерного магнитного резонанса этих веществ см. в <sup>(2)</sup>.

Таблица 1

Частоты колебаний гидроксила, окисного цикла и циклогексанового кольца (в см<sup>-1</sup>)

Группы	Жидкое состояние				20% раствор в CCl <sub>4</sub>			
	(I)	(II)	(III)	(IV)	(I)	(II)	(III)	(IV)
O—H	3390—3570; полоса	3520—3565; 3390—3520; полоски	3390—3590; полоса	3520—3565; полоска	3541 (1*) 3565 (2*) 3612 (0) 3621 (1)	3525 (1*) 3552 (2*) 3612 (0) 3623 (0)	3542 (1*) 3563 (3*) 3613 (0) 3621 (0)	3527 (1*) 3550 (2*) 3613 (0) 3626 (0)
	1250 (2*) 1257 (9*) 1268 (2* дв)	1252 (2* дв) 1265 (9* дв)	1252 (7 дв) 1268 (1 дв)	1252 (1 дв) 1269 (6 дв)	1249 (1*) 1255 (5*) 1269 (1 дв)	1252 (1* дв) 1264 (5* дв)	1252 (5 дв) 1268 (0 дв)	1253 (1 дв) 1269 (4 дв)
	703 (8 дв) 714 (2 дв)	702 (8 дв) 713 (3 дв)	700 (1 дв) 718 (7 дв)	703 (1 дв) 716 (8 дв)	700 (4 дв) 714 (1 дв)	701 (4 дв) 715 (2 дв)	701 (1 дв) 719 (4 дв)	699 (1 дв) 715 (4 дв)

\* Со слабым размывом в сторону низких частот.

ной части полосы узкая интенсивная полоска  $\sim 3520\text{--}3565\text{ см}^{-1}$ , указывающая на преобладание у (II) внутримолекулярной водородной связи, в отличие от (I), у которого вследствие преобладания межмолекулярной водородной связи такого резкого выделения подобной полоски не имеется. Но в отличие от трео-изомера (IV) у трео-изомера (II) низкочастотная часть полоски ( $\sim 3390\text{--}3520\text{ см}^{-1}$ ) также достаточно интенсивна. Это указывает на то, что в жидком состоянии у (II) группа O—H у довольно значительной части молекул высвобождается из внутримолекулярной водородной связи и вступает в межмолекулярную, т. е. трео-изомер переходит частично в эритро-изомер или близкий к нему по положению окисного цикла. У (I) переход эритро-изомера в трео-изомер оптически почти не обнаруживается.

Как видно, основными стабилизирующими факторами в рассматриваемом случае эритро-трео-изомерии являются два вида водородных связей. Энергия этих связей невелика ( $\sim 3\text{ ккал/моль}$ ). Поэтому они обуславливают резкое различие эритро-трео-изомеров в кристаллическом состоянии исследуемых спиртов, но в условиях нашего эксперимента (жидкое состояние при  $\sim 30^\circ$  у (II) и при  $\sim 85^\circ$  у (III); переохлажденное жидкое состояние при  $\sim 30^\circ$  у (I) и (IV); облучение в условиях эксперимента квантами света синей и ближней ультрафиолетовой области) стабилизирующее влияние водородных связей ослабевает. Однако ближний порядок и в этих условиях сохраняется и специфические для каждого из исследуемых спиртов черты их строения, как эритро- и трео-изомеров, остаются преимущественными.

В 20% растворах исследуемых спиртов в CCl<sub>4</sub>\* внутримолекулярные водородные связи, как правило, не разрушаются (3); оптически это подтверждается сохранением в прежней области узкой полосы частоты гидроксила у (II) и (IV). Многочленные ассоциированные при посредстве межмолекулярной водородной связи комплексы у (I) и (III) разрушаются, но у них сохраняются еще в этих условиях очевидно димерные комплексы (ближний порядок); появляются и мономеры. Оптически это подтверждается исчезновением широкой полосы O—H, появлением узкой полоски в области  $\sim 3540\text{--}3565\text{ см}^{-1}$  и слабых дублетов частот O—H отдельных молекул:  $\sim 3612, 3621\text{ см}^{-1}$ . Упомянутые узкие полоски являются также дублетами. Согласно предыдущим нашим исследованиям (см. ссылки на них в (4)) более высокая частота у каждого из этих дублетов характеризует аксиальный гидроксил, более низкая — экваториальный. Почти у всех изомеров более интенсивные в дублетах O—H высокие частоты, лишь у (II) интенсивности обеих частот примерно равны. Все это указывает на то, что каждый из че-

\* Интенсивности частот растворов несравнимы с интенсивностями частот исследуемых спиртов в жидком состоянии: растворы снимались при значительно большей экспозиции.

тырех спиртов в условиях эксперимента существует в двух конформациях, из которых более преимущественными являются конформации (обозначены по наибольшим заместителям — окисному циклу и метильной группе): у (I) — *цис-са*, у (III) и (IV) *транс-еа*; у (II) — обе конформации представлены примерно в равных количествах (см. рис. 1).

В спектре окиси этилена окисный цикл характеризуется частотой пульсирующего колебания трехчленного кольца  $1269\text{ см}^{-1}$  (5). Примерно такой же частотой (в пределах  $1264\text{—}1269\text{ см}^{-1}$ ) окисный цикл характеризуется

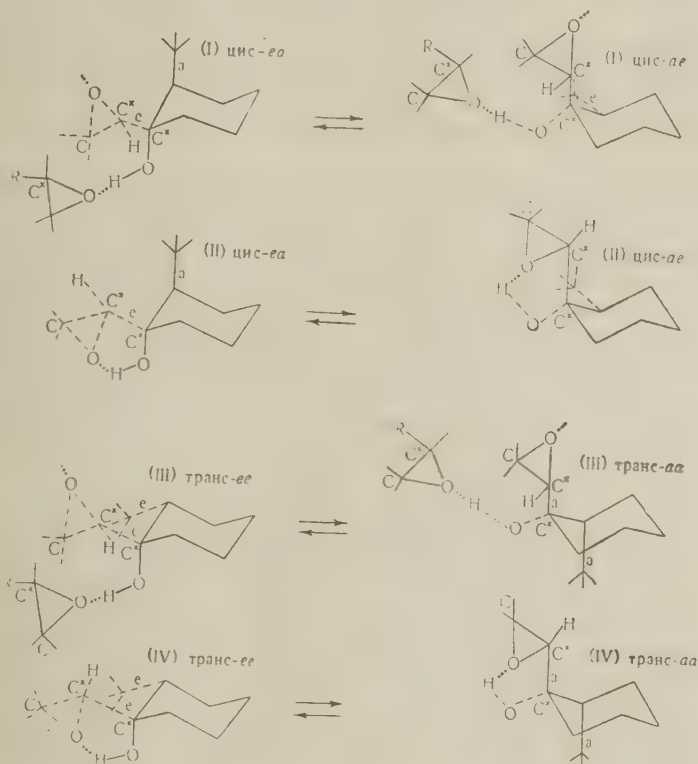


Рис. 1

и в спектрах *трео*-изомеров (II) и (IV); в спектрах *эритро*-изомеров (I) и (III) эта частота несколько понижена, находится в пределах  $1252\text{—}1257\text{ см}^{-1}$  (см. табл. 1). Сохранение в спектрах *трео*-изомеров ослабленной по интенсивности частоты  $\sim 1252\text{ см}^{-1}$ , а в спектрах *эритро*-изомеров ослабленной по интенсивности частоты  $\sim 1269\text{ см}^{-1}$  указывает на то, что в условиях нашего эксперимента *эритро*- и *трео*-изомеры в некоторой мере переходят друг в друга.

Дублетный характер линий говорит о существовании спиртов в двух конформациях. В спектре (I) дублет  $1250, 1257$  разрешен довольно отчетливо.

В спектрах исследуемых спиртов (см. табл. 1) в области частот пульсирующего колебания орто-замещенного циклогексанового кольца ( $\sim 700\text{—}720\text{ см}^{-1}$ ) наблюдается одна двойная более интенсивная частота и другая, также двойная, частота, резко ослабленная по интенсивности. Согласно предыдущим нашим исследованиям (6) соединения (I) и (II) с интенсивными более низкими частотами пульсирующего колебания кольца ( $\sim 699\text{—}703\text{ см}^{-1}$ ) имеют *цис*-конфигурацию, а соединения (III) и (IV) с интенсивной более высокой частотой этого колебания ( $\sim 713\text{—}719$ ) — *транс*-конфигурацию. Ослабленные по интенсивности частоты свидетельствуют о наличии подмеси одной конфигурации в другой (особенно у (II)). Двойной характер рассмотренных частот указывает на то, что каждый из спиртов в условиях эксперимента существует в двух конформациях, как это отмечено на рис. 1.

Спектры комбинационного рассеяния света снимались на отечественном спектрографе ИСП-51 со средней камерой и на спектрографе Хильгера Е612 от возбуждающей синей линии 4358 Å ртутной лампы (обозначения при интенсивностях см. (4)).

(I) цис-эритро-(2-метил-1-оксициклогексил)-этиленоксид,  $\Delta\nu$  см<sup>-1</sup>: 181 (2\*), 192 (3\*), 199 (2\*), 263 (1\*\*), 276 (0\*\*), 287 (3), 303 (1), 323 (2), 371 (2\*), 387 (4\*), 395 (4\*), 408 (0), 452 (5), 485 (6), 509 (0), 530 (4), 539 (0), 551 (6 дв), 566 (0), 586 (4 дв), 703 (8 дв), 714 (2 дв), 787 (7), 812 (4\*), 825 (4\*), 839 (4), 861 (6), 875 (4), 895 (3\*), 904 (4\*), 945 (5\*\*), 956 (5\*\*), 982 (6\*), 992 (2\*), 1004 (7\*), 1057 (3\*\*), 1085 (5\*\*), 1135 (6), 1144 (0), 1161 (6), 1181 (3 дв), 1223 (2ш), 1250 (2\*), 1257 (9\*), 1263 (2\*дв), 1275 (1\*), 1304 (2), 1332 (1\*), 1343 (4\*), 1354 (4\*), 1443 (8\*\*), 1452 (8\*\*), 1464 (3\*\*), 1476 (1\*\*), 2665 (3ш, полоска), 2853 (6\*), 2863 (6\*), 2899 (3\*), 2912 (3\*), 2930 (10\*), 2941 (10\*), 2954 (3\*), 2999 (4\*\*), 3014 (4\*\*), 3390—3570 (5; полоска с набором частот на ней).

(II) цис-трео-(2-метил-1-оксициклогексил)-этиленоксид,  $\Delta\nu$  см<sup>-1</sup>: 180 (2\*) 189 (3\*), 206 (2\*), 264 (1\*\*), 270(0\*\*), 287 (3), 309 (1), 321 (1\*), 331 (3\*) 371 (1), 383 (4\*), 394 (4\*), 411 (0), 455 (5), 486 (6), 509 (1), 527 (2\*), 539 (2\*), 549 (6\* дв), 564 (0), 586 (5 дв), 702 (8 дв), 713 (3 дв), 788 (8), 822 (5), 837 (6), 861 (6), 877 (4), 893 (4\*), 904 (3\*), 950 (5\*\*), 961 (3\*\*), 978 (6\*), 992 (2\*), 1005 (6\*дв), 1059 (3\*\*), 1084 (5\*\*), 1119 (1\*), 1133 (6\*), 1144 (0), 1159 (6), 1181 (3 дв), 1232 (2), 1252 (2\*дв), 1265 (9\*ш, дв), 1275 (2\*), 1307 (2), 1332 (1\*), 1342 (4\*), 1353 (4\*), 1443 (8\*\*), 1451 (8\*\*), 1465 (3\*\*), 1479 (1\*\*), 2663 (3ш, полоска), 2853 (6\*), 2863 (6\*), 2902 (3\*), 2915 (3\*), 2929 (10\*), 2943 (10\*), 2955 (3\*), 2991 (4\*\*), 3011 (4\*\*), 3390—3520; 3520—3565 (5; полоски, примыкающие друг к другу).

(III) транс-эритро-(2-метил-1-оксициклогексил)-этиленоксид,  $\Delta\nu$  см<sup>-1</sup>: 183 (2), 189 (0), 203 (2), 230 (0), 263 (2 дв), 286 (1), 296 (3\*), 306 (3\*), 325 (0), 350 (3\*), 358 (3\*), 440 (6\*\*), 448 (6\*\*), 461 (3\*\*), 485 (0), 569 (1), 582 (5), 597 (2), 609 (2\*), 615 (0\*), 634 (0), 680 (0), 700 (1 дв), 718 (7 дв), 777 (2\*), 796 (5\*), 833 (6), 865 (6\*), 878 (2\*), 892 (1\*), 964 (4), 980 (1\*), 993 (1\*), 1004 (1\*), 1051 (2\*\*), 1066 (4\*\*), 1078 (2\*\*), 1108 (2), 1134 (4), 1157 (4), 1183 (6\*), 1213 (6\*), 1229 (1), 1252 (7 дв), 1268 (1 дв), 1274 (1), 1298 (0), 1311 (0), 1326 (0\*), 1342 (2\*), 1361 (1\*), 1441 (6\*\*), 1453 (5\*\*), 1463 (3\*\*), 1479 (2\*\*), 2665 (3 ш, полоска), 2849 (6\*), 2868 (6\*), 2904 (3\*), 2921 (3\*), 2928 (10\*), 2941 (10\*), 2952 (3\*), 2991 (3\*\*), 3009 (3\*\*), 3390—3590 (5; полоса с набором частот на ней).

(IV) транс-трео-(2-метил-1-оксициклогексил)-этиленоксид,  $\Delta\nu$  см<sup>-1</sup>: 182 (2), 191 (0), 203 (1), 229 (0), 266 (3 дв), 286 (1), 296 (4\*), 306 (4\*), 320 (0), 349 (4\*), 359 (4\*), 440 (6\*\*), 448 (6\*\*), 463 (5), 487 (0), 566 (0), 579 (5), 593 (0), 607 (4\*), 616 (4\*), 634 (0), 681 (0), 703 (1 дв), 716 (8 дв), 794 (6), 835 (6), 861 (4), 885 (4\*), 896 (2\*), 957 (4), 981 (0\*), 990 (5\*), 998 (5\*), 1056 (3\*\*), 1068 (5р\*\*), 1081 (3\*\*), 1120 (5\*), 1136 (2\*), 1154 (5\*), 1187 (6), 1229 (4), 1252 (1дв), 1269 (6дв), 1275 (3), 1306 (0), 1330 (0\*), 1344 (3\*), 1357 (2\*), 1436 (5\*\*), 1449 (6\*\*), 1465 (3\*\*), 1478 (2\*\*), 2663 (3ш, полоска), 2852 (6\*), 2860 (6\*), 2904 (4\*), 2917 (3\*), 2927 (10\*), 2940 (10\*), 2954 (3\*), 2996 (4\*\*), 3007 (4\*\*), 3520—3565 (5; полоска, примыкает к ней слабый разрыв в сторону низких частот).

Институт горючих ископаемых  
Академии наук СССР

Поступило  
29 XII 1960

Институт органической химии им. Н. Д. Зелинского  
Академии наук СССР

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> И. Н. Пазаров, А. А. Ахрем, ЖОХ, 28, 1791 (1958). <sup>2</sup> Дж. Машер, А. А. Ахрем, ДАН, 134, 354 (1960). <sup>3</sup> М. И. Батуев, ДАН, 28, 423 (1940); 40, 315 (1943); 47, 100 (1945). <sup>4</sup> М. И. Батуев, А. А. Ахрем, А. Д. Матвеева, Изв. АН СССР, ОХН, 1960, 538. <sup>5</sup> К. Кольрауш, Спектры комбинационного рассеяния, ИЛ, 1952, стр. 288. <sup>6</sup> М. И. Батуев, А. А. Ахрем и др., ДАН, 117, 423 (1957).

Э. Е. ВАЙНШТЕЙН, Ю. Ф. КОПЕЛЕВ и Б. И. КОТЛЯР

# О НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ РЕНТГЕНСПЕКТРАЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ ФЕРРОЦЕНА И ЕГО ПРОИЗВОДНЫХ

(Представлено академиком А. П. Виноградовым 16 XI 1960)

Недавно Е. М. Шустеровичем и М. Е. Дяткиной (<sup>1-3</sup>) были рассчитаны молекулярные орбиты и распределение электронного заряда в молекулах ряда ароматических комплексов. Представляло интерес проверить некоторые из выводов теории путем исследования тонкой структуры рентгеновских спектров поглощения металла в этих соединениях. Принципиальная возможность такого использования рентгеновских данных, указанная еще в (<sup>4</sup>), стала практически осуществимой в последние годы в результате усовершенствования теории рентгеновских спектров и разработки методов расчета ее тонкой структуры (<sup>5-9</sup>).

Экспериментальные данные о рентгеновских спектрах поглощения переходных металлов во многих бис-циклопентадиенильных соединениях были в основном получены в (<sup>10-13</sup>). В 1958 г. тонкая структура *K*-спектров поглощения железа в  $\text{Fe}(\text{C}_5\text{H}_5)_2$  и  $\text{Fe}(\text{C}_5\text{H}_5)_2\text{Cl}$  была также изучена в нашей лаборатории\*. Эти данные и были положены нами в основу дальнейших теоретических исследований. Для сравнения в тех же условиях были получены рентгеновские *K*-спектры поглощения железа в ферро-и феррицианидах калия, а также в  $\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$  и  $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3$ . Относительное положение главного максимума рентгеновских *K*-спектров поглощения железа в изученных соединениях иллюстрируется цифрами, приведенными в табл. 1. Как видно, результаты наших измерений, относящиеся к четырем первым соединениям, хорошо согласуются с литературными данными (<sup>14</sup>). Спектры иссле-

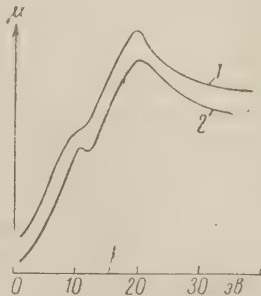


Рис. 1. Рентгеновские *K*-спектры поглощения железа в  $\text{Fe}(\text{C}_5\text{H}_5)_2$  (1) и  $\text{Fe}(\text{C}_5\text{H}_5)_2\text{Cl}$  (2).

Таблица 2

Соединение	$\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$	$\text{K}_4[\text{Fe}(\text{CN})_6]$	$\text{K}_3[\text{Fe}(\text{CN})_6]$	$\text{Fe}(\text{NO}_3)_3$	$\text{Fe}(\text{C}_5\text{H}_5)_2$	$\text{Fe}(\text{C}_5\text{H}_5)_2\text{Cl}$
Энергия, эВ	0*	1,9	3,8	6,8	6,1	6,1

довались с помощью фокусирующего рентгеновского спектрографа на отражение и регистрировались фотографически при перпендикулярном падении лучей на пленку. Отражающий кристалл — кварц, плоскости (1340). Линии сравнения  $\text{Co K}\alpha_{1,2}$ . Экспозиция 3—6 часов. Режим 15 кв и 50 ма. Эффективная толщина поглотителя 5 мг/см<sup>2</sup>.

На рис. 1 сопоставлены рентгеновские *K*-спектры поглощения железа в  $\text{Fe}(\text{C}_5\text{H}_5)_2$  и  $\text{Fe}(\text{C}_5\text{H}_5)_2\text{Cl}$  после их исправления на аппаратные иска-

\* Работа доложена на Всесоюзном совещании по рентгеновской спектроскопии в Ростове-на-Дону 30 июня 1959 г.

жения. Здесь по оси абсцисс отложены энергии рентгеновских квантов, отсчитываемые от произвольного нуля, а по оси ординат — величины, пропорциональные коэффициенту поглощения. Как видно, структура  $K$ -краев поглощения железа в обоих соединениях во многом аналогична и спектры отличаются только ходом изменения коэффициента поглощения в наиболее длинноволновой области края.

При расчете экспериментальных краев поглощения железа в рассматриваемых комплексах мы исходили из доказанного неоднократно <sup>(6,15,16)</sup> предположения о водородоподобности системы, в которой в газообразных молекулах или кристаллических комплексах с приблизительно центральной симметрией поля движется вырванный из  $K$ -оболочки электрон за пределами заполненных оболочек поглощающего атома. В этом приближении система селективных линий поглощения и непрерывный край (в совокупности образующие тонкую структуру основного  $K$ -края поглощения элемента в соединении) могут быть рассчитаны с помощью соотношений

$$\varepsilon_n = \varepsilon_\infty - \frac{\eta^2}{n^2} Ry; \tag{1}$$

$$\frac{\tau_n}{\tau_\infty} = \frac{4\eta^2}{\pi\Gamma} \frac{n^2 - 1}{n^5}, \tag{2}$$

в которых  $\varepsilon_n$  и  $\varepsilon_\infty$  — соответственно, энергии перехода  $K$ -электрона на один из  $np$ -уровней системы и на границу непрерывного спектра,  $\tau_n$  — высота  $n$ -й линии поглощения,  $\tau_\infty$  — высота непрерывного спектра,  $\Gamma$  — ширина линий поглощения и границы непрерывного спектра,  $Ry$  — постоянная Ридберга,  $n$  — эффективное главное квантовое число  $n$ -уровня энергии, а  $\eta$  — эффективный заряд  $K$ -ионизированного поглощающего атома в молекуле. Последняя из этих формул была недавно получена в <sup>(9)</sup> в результате вывода, более строгого, чем данный в <sup>(7)</sup>, и, как показала проверка <sup>(17)</sup>, хорошо оправдывает себя при расчете спектров многих молекул, в которых сохраняется центральная симметрия поля. Однако попытка непосредственного применения соотношения (2) для расчета  $K$ -края поглощения металлического атома в молекулах типа ферроцена наталкивается на некоторые затруднения, так как отношение  $\tau_n/\tau_\infty$ , полученное из эксперимента, оказывается существенно больше величины, следующей из формулы (2) при учете (1). В рамках одноэлектронного приближения этот факт казалось естественным объяснять влиянием электрического поля молекулы (которое в данном случае имеет симметрию  $D_{5d}$ ) на водородоподобную систему, образующуюся после  $K$ -ионизации центрального атома.

Т а б л и ц а   2

Характеры неприводимых представлений группы  $D_{5d}$

	$E$	$C_5^{\pm 1}$	$C_5^{\pm 2}$	$5u_z$	$I$	$S_{10}^{\pm 1}$	$S_{10}^{\pm 3}$	$5\sigma_d$
$A_{1g}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$A_{2g}$	1	1	1	−1	1	1	1	−1
$E_{1g}$	2	$2 \cos \frac{2\pi}{5}$	$2 \cos \frac{4\pi}{5}$	0	2	$2 \cos \frac{2\pi}{5}$	$2 \cos \frac{4\pi}{5}$	0
$E_{2g}$	2	$2 \cos \frac{4\pi}{5}$	$2 \cos \frac{2\pi}{5}$	0	2	$2 \cos \frac{4\pi}{5}$	$2 \cos \frac{2\pi}{5}$	0
$A_{1u}$	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1
$A_{2u}$	1	1	1	1	−1	−1	−1	1
$E_{1u}$	2	$2 \cos \frac{2\pi}{5}$	$2 \cos \frac{4\pi}{5}$	0	−2	$−2 \cos \frac{2\pi}{5}$	$−2 \cos \frac{4\pi}{5}$	0
$E_{2u}$	2	$2 \cos \frac{4\pi}{5}$	$2 \cos \frac{2\pi}{5}$	0	−2	$−2 \cos \frac{4\pi}{5}$	$−2 \cos \frac{2\pi}{5}$	0

Характеры всех неприводимых представлений группы  $D_{sd}$  помещены в табл. 2. Как видно, нечетные представления этой группы осуществляются преобразованием шестимерного базиса. Это означает, что в поле рассматриваемой симметрии имеет место увеличение до шести числа состояний, на которые может захватываться, вырванный в процессе  $K$ -поглощения  $1s$ -электрон, по сравнению с тремя  $p$ -состояниями водородоподобной системы в полях иной симметрии или в отсутствие внешнего поля.

Если расстояние между этими уровнями мало (по сравнению с шириной  $K$ -состояния поглощающего атома), то за счет этого можно ожидать двукратного увеличения относительной интенсивности линий селективного рентгеновского поглощения центрального атома в молекулах рассматриваемого типа по сравнению с теми молекулами, в поле которых упомянутое «размножение» уровней не имеет места. По мере увеличения степени ионности сил связи в молекулах типа  $Me(C_5H_5)_2$  и увеличения напряженности поля, действующего на центральный атом, должно возрасть расстояние между уровнями энергии, захватывающими  $1s$ -электрон в процессе  $K$ -поглощения, а вместе с этим должна расти ширина селективных полос поглощения. Напротив, интенсивность этих полос должна при этом убывать, и, например, для таких практически ионных соединений, как  $Mn(C_5H_5)_2$ , она должна уже несущественно отличаться от величины, подсчитываемой по формуле (2). Анализ всего имеющегося в настоящее время экспериментального материала подтверждает справедливость этих заключений. Поэтому при расчете тонкой структуры спектров поглощения металла в бис-циклопентадиенильных комплексах с типично ковалентными связями (таких, например, как ферроцен) мы принимали, что увеличение относительной интенсивности линий селективного поглощения близко к максимальному\*. В этом случае расчет спектра и определение энергетических констант, относящихся к поглощаемому атому, в таких молекулах может быть осуществлен без особых затруднений. На рис. 2 и 3 представлены результаты проведенного таким образом расчета рентгеновского  $K$ -спектра поглощения железа в молекулах  $Fe(C_5H_5)_2^{**}$  и  $Fe(C_5H_5)_2 Cl$ . Как видно, они находятся в хорошем согласии с данными, полученными теоретически (1,3).

Величины зарядов, сосредоточенные на атомах железа, в обоих исследованных комплексах оказались практически (в пределах точности их опре-

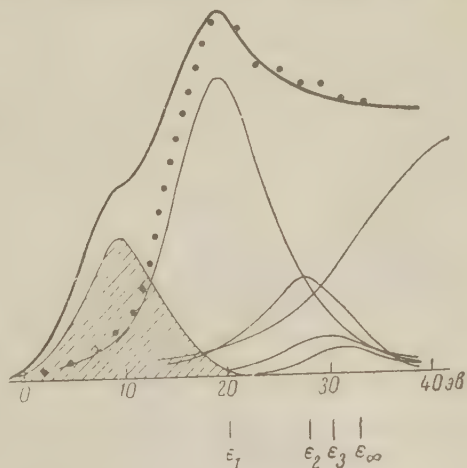


Рис. 2. Расчет тонкой структуры рентгеновского  $K$ -спектра поглощения железа в  $Fe(C_5H_5)_2$ . Жирная линия — экспериментальная кривая; тонкие линии — линии селективного поглощения и непрерывный край; заштрихована полоса поглощения, связанная с переходом  $1s$ -электронов на молекулярные уровни энергии; точками помечена суммарная теоретическая кривая поглощения, обязанная поглощению «экситонного» типа

\* Для оценки погрешности, которая может быть внесена в результаты расчета вследствие недостаточного точного знания величины поправочного коэффициента в формуле (2), заметим, что отклонение этой величины от выбранного нами значения (два) на 50% может привести при прочих равных условиях к увеличению вычисленного заряда на атоме железа в молекуле ферроцена лишь на 15%.

\*\* В момент подготовки к печати настоящей работы появилась статья (18), в которой сделана аналогичная попытка расчета рентгеновского  $K$ -края поглощения железа в ферроцене, полученного в работе (13). Как показала проверка, этот расчет ошибочен.

деления по рентгеновским спектрам) совпадающими друг с другом и близкими к  $+0,7$ , а два других параметра, характеризующих состояние поглощающего атома в соединении,  $n = 1,75$ ,  $\Gamma = 11,2$  эв. Это означает, что, например, по сравнению с рентгеновским спектром железа в  $K_3Fe(CN)_6$  ( $\eta' = \eta - 1 = 1$ ;  $n = 1,7$  и  $\Gamma = 7,5$  эв) в спектрах ферроцена наиболее существенные изменения претерпевает ширина селективных полос поглощения, которая возрастает почти на 50% за счет расширения конечного уровня р-орбитали фотоэлектрона в молекуле.

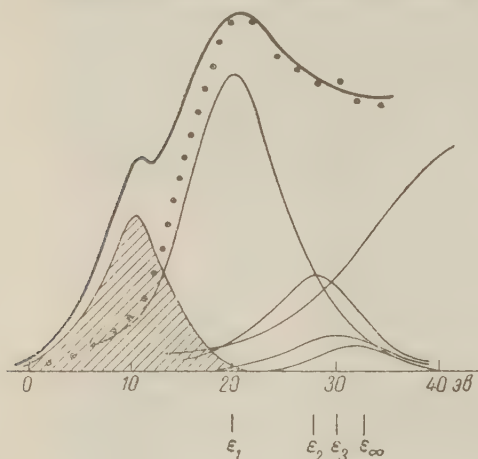


Рис.3. Расчет тонкой структуры рентгеновского  $K$ -спектра поглощения железа в  $Fe(C_5H_5)_2Cl$ . Обозначения те же, что и на рис. 2.

Как и следовало ожидать на основании теоретических расчетов, в рентгеновских спектрах поглощения металла в ароматических комплексах, наряду с серией полос поглощения «экситонного» типа, наблюдается также достаточно интенсивная полоса, обязанная своим появлением переходам  $1s$ -электронов поглощающего атома на группу молекулярных уровней соответствующей симметрии. Ширина этих полос хорошо согласуется с тем, чего можно ожидать на основании анализа данных (1) об энергии соответствующих молекулярных орбит комплексов, а их относительная интенсивность изменяется при переходе от спектра железа в ферроцене к спектру, относящемуся к катиону. В феррицинии она на 5% больше, чем интенсивность молекулярной полосы в спектре железа в нейтральной молекуле.

Авторы выражают благодарность В. В. Воеводскому за интерес к работе и предоставление веществ для исследования.

Институт неорганической химии  
Сибирского отделения Академии наук СССР

Институт геохимии и аналитической химии  
им. В. И. Вернадского  
Академии наук СССР

Одесский педагогический институт  
им. К. Д. Ушинского

Поступило  
7 XI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Е. М. Шусторович, М. Е. Дяткина, ДАН, **128**, 1234 (1959).
- <sup>2</sup> Е. М. Шусторович, М. Е. Дяткина, ДАН, **131**, 113 (1960).
- <sup>3</sup> Е. М. Шусторович, М. Е. Дяткина, ДАН, **133**, 141 (1960).
- <sup>4</sup> Э. Е. Вайнштейн, К. И. Нарбутт, Изв. АН СССР, ОХН, № 4, 344 (1950).
- <sup>5</sup> Э. Е. Вайнштейн, Р. Л. Баринский, К. И. Нарбутт, ДАН, **77**, 1003 (1951).
- <sup>6</sup> Э. Е. Вайнштейн, Р. Л. Баринский, К. И. Нарбутт, ЖЭТФ, **23**, 593 (1952).
- <sup>7</sup> Э. Е. Вайнштейн, Р. Л. Баринский, К. И. Нарбутт, ДАН, **79**, 225 (1951).
- <sup>8</sup> Р. Л. Баринский, Э. Е. Вайнштейн, К. И. Нарбутт, ДАН, **82**, 355 (1952).
- <sup>9</sup> Е. Г. Наджак, Р. Л. Баринский, ДАН, **129**, 1279 (1959).
- <sup>10</sup> Е. Кауер, Zs. phys. Chem., **6**, 105 (1956).
- <sup>11</sup> К. Вёке, Zs. phys. Chem., **10**, 45, 59 (1957).
- <sup>12</sup> G. Joos, K. Peter, Zs. phys. Chem., **18**, 75 (1958).
- <sup>13</sup> E. Fischer, G. Joos, E. Vogt, Zs. phys. Chem., **18**, 80 (1958).
- <sup>14</sup> S. Ioshida, Sci. Papers Inst. Chem. Rs. Tokyo, **38**, 272 (1941).
- <sup>15</sup> Р. Л. Баринский, Э. Е. Вайнштейн, К. И. Нарбутт, Изв. АН СССР, сер. физич., **21**, 1351 (1957).
- <sup>16</sup> Р. Л. Баринский, Э. Е. Вайнштейн, Изв. АН СССР, сер. физич., **23**, 585 (1959).
- <sup>17</sup> Р. Л. Баринский, Е. Г. Наджак, Изв. АН СССР, **24**, 407 (1960).
- <sup>18</sup> Р. Л. Баринский, Журн. структурн. химии, **1**, 200 (1960).

Академик И. Л. КНУНЯНЦ и Ю. А. ЧЕБУРКОВ

# О СЛУЧАЕ ПРОЯВЛЕНИЯ ПСЕВДОГАЛОИДНЫХ СВОЙСТВ ТРИФТОРМЕТИЛЬНОЙ ГРУППЫ, СВЯЗАННОЙ С АТОМОМ УГЛЕРОДА

Как известно, перфторалкильная группа обладает сильным сродством к электрону и ее влияние на характер молекулы во многих случаях можно сравнить с влиянием галогенов. Наиболее заметны эти свойства у трифторметильной группы, что согласуется с ее высокой электроотрицательностью ( $\chi_{\text{CF}_3}$  2,9—3,3), которая лежит между электроотрицательностями фтора ( $\chi_{\text{F}}$  4,0) и хлора ( $\chi_{\text{Cl}}$  3,0).

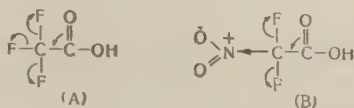
Случаи, когда трифторметильная группа ведет себя подобно галоиду, широко известны на примерах перфторалкильных производных элементов: Hg (<sup>1-3</sup>); Li (<sup>4</sup>), Mg, Zn, Cd (<sup>5</sup>); Si (<sup>6</sup>); P, As, Sb (<sup>7,8</sup>); S (<sup>9</sup>); J (<sup>10</sup>) и др. Наиболее типичным примером является гидролиз таких соединений, причем трифторметильная группа часто количественно элиминируется в виде фтороформа ( $\text{CF}_3$ )<sub>n</sub> — Э + nH<sub>2</sub>O → nCF<sub>3</sub>H + Э(OH)<sub>n</sub>.

Гораздо менее изучены те случаи, когда псевдогалоидными свойствами обладает перфторалкильная группа, связанная с атомом углерода. Пожалуй, единственной достоверной реакцией подобного рода является галоформенный распад перфторкетон<sup>(11)</sup>. Однако известны соединения, в которых CF<sub>3</sub>-группа, вопреки ожиданиям, не проявляет псевдогалоидных свойств, как, например, в трифторуксусной кислоте.

Вследствие большей электроотрицательности фтора, по сравнению с хлором, трифторметильная группа более электрофильна, чем трихлорметильная, однако трифторуксусная кислота устойчива к нагреванию и не подвергается галоформенному распаду.

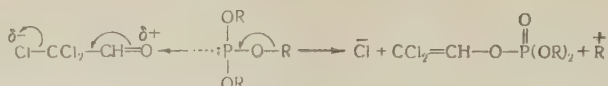
Естественным объяснением этого факта является сильное электроноотгоняющее действие 3 атомов фтора, намного превышающее аналогичное действие хлора, вследствие чего становится возможным сопряжение карбонильной группы с атомами фтора и упрочнение C—C-связи в трифторуксусной кислоте (А).

Таким образом, накопление сильных электроотрицательных заместителей при углеродном атоме в уксусной кислоте приводит вначале к уменьшению прочности C—C-связи, а в дальнейшем к ее упрочнению за счет «обратной поляризации» карбонильного кислорода. Сказанное иллюстрируется также примером необычной устойчивости дифторнитроуксусной кислоты<sup>(12)</sup> (В).



Возможность «обратной поляризации» карбонильного кислорода, казалось бы, противоречит общепринятым взглядам на его реакционную способность, однако попытки рассмотрения ряда реакций с этой точки зрения могут оказаться весьма плодотворными. В качестве иллюстрации сошлемся на известную реакцию Перкова<sup>(13)</sup> получения виниловых эфиров фосфорной кислоты, механизм которой можно трактовать как нуклеофильную атаку свободной электронной пары атома фосфора на положительно заря-

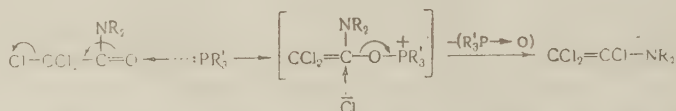
женный (вследствие «обратной поляризации») атом кислорода карбонильной группы



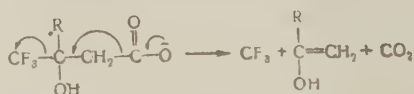
или взаимодействие трихлорнитрозометана с триэтилфосфитом, приводящее к получению производного дихлорформоксима <sup>(14)</sup>



Недавно, сделана попытка объяснить с этой же точки зрения реакцию получения трихлорвинилалкиламинов из диалкиламидов трихлоруксусной кислоты <sup>(15)</sup>

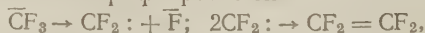


При изучении фторированных β-оксикислот нами был найден новый и четкий пример проявления псевдогалогидных свойств трифторметильной группы, связанной с атомом углерода. При пиролизе калиевых солей β,β-дифторметил-β-оксипропионовой (I) и β-трифторметил-β-оксимасляной (II) кислот происходит элиминирование трифторметильной и карбоксильной групп и образуются соответствующие кетоны: трифторацетон и ацетон.

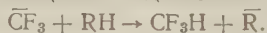


I R = CF<sub>3</sub>; II R = CH<sub>3</sub>.

Специальному исследованию подверглось выяснение судьбы трифторметильного аниона, который мог либо терять ион фтора, превращаясь в дифторкарбен и далее в тетрафторэтилен



либо реагировать с получающимся ацетоном с образованием фтороформа



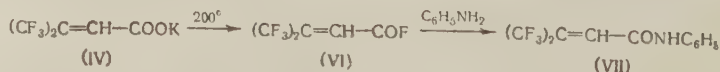
Оказалось, что трифторметильная группа практически количественно превращается во фтороформ.

При пиролизе калиевой соли оксикислоты I наблюдалось и другое направление реакции, а именно, с выходом 30% получался β,β-дифторметил-β-пропиолактон (III), свойства которого были изучены нами ранее <sup>(16)</sup>



Представлялось интересным исследовать также поведение трифторметильной группы в солях β,β-дифторметилакриловой (IV) и β-трифторметилкротоновой (V) кислот.

При пиролизе калиевой соли β,β-дифторметилакриловой кислоты был получен ее фторангидрид (VI), идентифицированный в виде анилида (VII)



При термическом разложении калиевой соли β-трифторметилкротоновой кислоты был выделен с небольшим выходом только трифторизобутилен

Соединение	Ко- лич., г	Т-ра начала разлож., °C	Продукты реакции	Ко- лич., г (вы- ход, %)	Мол. вес.		Константы	Лит. данные	Анализ, %		Охарактеризован превращением в известный
					найд.	вы- числ.			найд.	вы- числ.	
$\text{CF}_3 \text{---} \text{C} \begin{array}{l} \diagup \text{CF}_3 \\ \diagdown \text{OH} \end{array} \text{---} \text{CH}_2 \text{---} \text{COOK}^*$	12,78	190	$\text{CF}_3 \text{COCH}_3$ $\text{CF}_3 \text{---} \text{C} \begin{array}{l} \diagup \text{CF}_3 \\ \diagdown \text{O---CO} \end{array} \text{---} \text{CH}_2$	3,17 (59) 2,67 (26)			Т. кип. 21—25° Т. кип. 90—94° $n_D^{20}$ 1,3244	(16) Т. кип. 94,5—95° $n_D^{20}$ 1,3240	C 17,14 H 1,43 F 81,41	17,14 1,34 81,42	2,4-Динитрофенил- гидразон Аниlid β, β-дитри- фтометил-β-ок- сипропионовой кислоты (16)
$\text{CF}_3 \text{---} \text{C} \begin{array}{l} \diagup \text{CF}_3 \\ \diagdown \text{CH}_3 \end{array} \text{---} \text{CH} \begin{array}{l} \diagup \text{OH} \\ \diagdown \end{array} \text{---} \text{COOK}$	23,42	195—200	$\text{CF}_3\text{H}$ $\text{CH}_3\text{COCH}_3$	7,00 (94) 4,22 (65)	68,6	70	Т. кип. —81—(—79,5°) Т. кип. 57—59°				2,4-Динитрофенил- гидразон
$\text{CF}_3 \text{---} \text{C} \begin{array}{l} \diagup \text{CF}_3 \\ \diagdown \text{CH}_3 \end{array} \text{---} \text{CH} \text{---} \text{COOK}$	19,20	190—200	$\text{CF}_3 \text{---} \text{CH} = \text{CH} \text{---} \text{COF}$ $\text{CF}_3 \text{---} \text{CH} = \text{CH} \text{---} \text{COF}$	8,6 (52)			Т. кип. 64—65°/752 мм $n_D^{20}$ 1,3010 $d_4^{20}$ 1,5275 найд. $M_R$ 25,78 вычисл. 25,82		C 28,60 H 0,49 F 63,34	28,55 0,48 63,35	Аниlid β, β-дитри- фтометил-хри- стовой кислоты(17)
$\text{CF}_3 \text{---} \text{C} \begin{array}{l} \diagup \text{CF}_3 \\ \diagdown \text{CH}_3 \end{array} \text{---} \text{CH} \text{---} \text{COOK}$	20,23	270	$\text{CF}_3 \text{---} \text{C} \begin{array}{l} \diagup \text{CF}_3 \\ \diagdown \text{CH}_3 \end{array} \text{---} \text{CH} = \text{CH}_2$	2,62 (23)	110,4	110,0	Т. кип. 3,6—3,7°	(18) Т. кип. 6,4°	C 24,30 H 0,55 F 66,30	24,23 0,50 67,19	

\* Пиролиз производился в вакууме.

Таким образом, трифторметильная группа, связанная с углеродом во втором валентном состоянии, неподвижна аналогично «винильному» хлору, что также можно рассматривать как проявление ею псевдогалоидных свойств.

### Экспериментальная часть

**Получение калиевых солей кислот.** Соли легко получали нейтрализацией кислот небольшим избытком сухого бикарбоната с последующим высушиванием на воздухе и перекристаллизацией из подходящего растворителя. Свойства полученных солей приведены в табл. 2.

Таблица 2

Соединение	Растворитель для перекристаллизации	Т. пл., °C	Анализ, %	
			найд.	вычисл.
I $\begin{array}{c} \text{CF}_3 \\   \\ \text{C}-\text{CH}_2-\text{COOK} \\   \\ \text{CF}_3 \quad \text{OH} \end{array}$	Переосажд. на холоду $\text{CCl}_4$ из этилацетата	182	C 22,70 H 1,13 F 40,93	22,68 1,17 43,19
II $\begin{array}{c} \text{CF}_3 \\   \\ \text{C}-\text{CH}_2-\text{COOK} \\   \\ \text{CH}_3 \quad \text{OH} \end{array}$	То же	156—160 (разлаг.)		
IV $\begin{array}{c} \text{CF}_3 \\   \\ \text{C}=\text{CH}-\text{COOK} \\   \\ \text{CF}_3 \end{array}$	Абс. диоксан	168		
V $\begin{array}{c} \text{CF}_3 \\   \\ \text{C}=\text{CH}-\text{COOK} \\   \\ \text{CH}_3 \end{array}$	Как I	236—238	C 24,22 H 0,44	24,40 0,41



**Термическое разложение солей.** Пиролиз сухих солей производился нагреванием их в колбе из пирекса на металлической бане. Продукты реакции собирались в ловушку, охлаждаемую либо до  $-78^\circ$ , либо до  $-110^\circ \text{C}$ . Затем газы отгонялись от высококипящей фракции на колонке Подбильняка. Остаток фракционировался на обычной колонке. Пиролиз солей в вакууме производился в стеклянном приборе на шлифах. Соль помещалась в пробирку, которая затем соединялась с ловушкой, снабженной краном для откачки системы. При достижении вакуума 0,05 мм рт. ст. кран закрывался, ловушка охлаждалась жидким азотом и производился пиролиз. По окончании реакции продукты разделялись, как в опыте 1. Результаты пиролиза солей приведены в табл. 1.

Поступило  
5 X 1960

### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> H. Emeleus, Chem. and Ind., 1952, 1235. <sup>2</sup> J. Lagowski, Quart. Rev., 1959, 233. <sup>3</sup> H. Emeleus, J. Lagowski, J. Chem. Soc., 1959, 1497. <sup>4</sup> O. Pierce, E. McBee, G. Judd, J. Am. Chem. Soc., 76, 474 (1954). <sup>5</sup> R. Haszeldine, J. Chem. Soc., 1954, 1273. <sup>6</sup> A. Geyer, R. Haszeldine, J. Chem. Soc., 1957, 3925. <sup>7</sup> H. Emeleus, J. Smith, J. Chem. Soc., 1959, 375. <sup>8</sup> R. Haszeldine, B. West, J. Chem. Soc., 1957, 3881. <sup>9</sup> R. Haszeldine, J. Kidd, J. Chem. Soc., 1955, 2901. <sup>10</sup> J. Banus, H. Emeleus, R. Haszeldine, J. Chem. Soc., 1951, 61. <sup>11</sup> R. Haszeldine, J. Chem. Soc., 1953, 1748. <sup>12</sup> И. Л. Кнунянц, А. В. Фокин, ДАН, 112, № 1, 67 (1957). <sup>13</sup> W. Perkow, Chem. Ber., 87, 755 (1954). <sup>14</sup> J. Allen, J. Am. Chem. Soc., 79, 3071 (1957). <sup>15</sup> A. Spreziale, R. Freeman, J. Am. Chem. Soc., 82, 903 (1960). <sup>16</sup> И. Л. Кнунянц, Ю. А. Чебурков, Изв. АН СССР, ОХИ, 1960, 678. <sup>17</sup> И. Л. Кнунянц, Ю. А. Чебурков, Изв. АН СССР, ОХН, 1960, 2162. <sup>18</sup> F. Swarts, Bull. soc. chim. Belg., 36, 199 (1927).

Н. М. НАЗАРОВА и Л. Х. ФРЕЙДЛИН

## ТЕРМИЧЕСКОЕ АЛКИЛИРОВАНИЕ ЦИКЛОГЕКСАНА ОЛЕФИНАМИ ПОД ДАВЛЕНИЕМ

(Представлено академиком А. А. Баландиным 11 XI 1960)

Алкилирование ароматических, нормальных и изопарафиновых углеводородов олефинами являлось предметом многих исследований. Указанный путь синтеза изопарафиновых и жирноароматических углеводородов нашел себе широкое промышленное применение. В отличие от этого, алкилирование важного класса циклопарафиновых углеводородов до настоящего времени остается почти совсем неизученным.

Пайнс и Ипатьев<sup>(1)</sup> исследовали алкилирование метилциклопентана в присутствии 100%  $H_2SO_4$  и HF бутиленами, изобутиленом, пентеном-1 и другими олефинами. Процесс протекал очень сложно, и продукты прямого присоединения олефинов не были получены. О наличии процесса алкилирования можно было судить, лишь принимая во внимание возможные промежуточные реакции, — изомеризацию образующегося диалкилциклопентана в диалкилциклогексан и миграцию алкильных групп. Мамедалиев с Кулиевым<sup>(2)</sup> и Мамедовой<sup>(3)</sup> алкилировали метил-, этил- и изопропилциклогексаны пропиленом и бутиленом в присутствии  $H_2SO_4$ . При этом были выделены замещенные циклогексаны с боковыми алкильными группами, соответствующими взятому олефину. Однако незамещенные циклогексан и циклопентан в этих условиях не алкилировались и моноалкилцикланы таким путем не удалось получить.

В настоящей работе впервые осуществлено прямое алкилирование циклогексана этиленом, пропиленом и изобутиленом при повышенных температурах и давлениях. Выделены и охарактеризованы основные продукты реакции, изучено влияние ряда факторов на ход процесса.

### Экспериментальная часть

Опыты проводились на установке проточного типа, подобной описанной ранее<sup>(4)</sup>. Давление в реакторе создавалось реагирующей смесью, подававшейся из смесителя при помощи жидкостного насоса. В реактор объемом 120 мл загружалось 50 мл  $Ca_3(PO_4)_2$  и 70 мл фарфоровых черепков или 120 мл кусочков кварца. Циклогексан имел: т. кип.  $80,3^\circ$ ,  $n_D^{20,5}$  1,4266 и  $d_4^{20}$  0,7752. Полученные катализаты фракционировались на высокоэффективной колонке. Однородные фракции от нескольких опытов соединялись вместе и подвергались исследованию. Отделение примеси непредельных и выделение ароматических углеводородов производилось путем хроматографирования на силикагеле. Структура полученных алкилциклогексанов определялась превращением их путем дегидрирования на катализаторе Pt/C (20% Pt) при  $300^\circ$  в соответствующие ароматические углеводороды и окислением последних в кислоты.

Алкилирование этиленом. В опытах при 200 и 450 атм. давления ( $450^\circ$ ) взятый в реакцию этилен поглотился полностью, а при 100 атм. — на 90%. После удаления циклогексана из алкилата выделялись фракции: I — моноэтилциклогексана (т. кип.  $129-131^\circ$ ), II — диэтилцик-

логексана (т. кип. 170—185°) и вышекипящий остаток, рис. 1. После освобождения от непредельных из 30 мл фракции I было получено 27 мл продукта с  $n_D^{20}$  1,4323 и  $d_4^{20}$  0,7857. По (5) для этилциклогексана: т. кип. 131,78°,  $n_D^{20}$  1,4378,  $d_4^{20}$  0,7879. После его дегидрирования и последующего хроматографирования был выделен этилбензол с  $n_D^{20}$  1,4957,  $d_4^{20}$  0,8660. По (5) для этилбензола  $n_D^{20}$  1,4959,  $d_4^{20}$  0,8670. Окислением по Ульману из него была получена бензойная кислота с т. пл. 122,5°.

После удаления из фракции II непредельных (28%) она полностью перегналась при 172—175° и имела  $n_D^{20}$  1,4415,  $d_4^{20}$  0,8013. Эти свойства близки к свойствам изомерных диэтилциклогексанов. После дегидрирования и последующего хроматографирования из катализата была выделена узкая фракция углеводородов (80%), с т. кип. 178—180°/740 мм,  $n_D^{20}$  1,4918,  $d_4^{20}$  0,8613. Эти свойства соответствуют изомерам диэтилбензола (5). На хро-

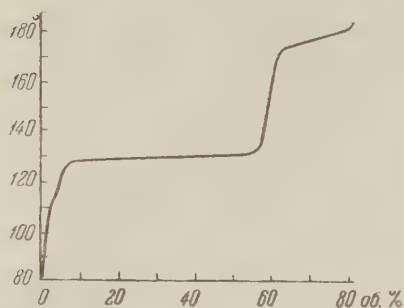


Рис. 1. Кривая фракционирования алкилата опыта № 3

матограмме полученного диэтилбензола (с дибутилсебагинатом в качестве носителя) были обнаружены два пика. Диэтилбензол был окислен по (6) в смесь фталевых кислот, из которой, пользуясь различной растворимостью их в горячей воде (7), были выделены индивидуальные кислоты: *о*-фталевая, *изо*-фталевая и терефталевая — в весовых соотношениях 1 : 1,6 : 8. При возгонке *о*-изомера образовались игольчатые кристаллы ангидрида.

В оптимальных условиях (опыт 3) из 253 г взятого в реакцию циклогексана возвратилось 212 г. Кроме фракций моно- и диэтилциклогексана, составляющих основную часть алкилата (50 и 20% соответственно), выделялось также небольшое количество (3,2%) легкокипящих продуктов (с т. кип. до 75°) крекинга и димеризации олефина, нами не исследованных. Остальная часть алкилата приходится на долю промежуточных фракций (85—125° и 135—170°) и высококипящего остатка. Остаток, 75% которого распределилось между фракциями: т. кип. 185—220°,  $n_D^{20}$  1,4570,  $d_4^{20}$  0,8262 и т. кип. 220—250°,  $n_D^{20}$  1,4640,  $d_4^{20}$  0,8393, по-видимому, представляет собой смесь полиэтилциклогексанов. В опыте 3 табл. 1 содержалось 11% непредельных углеводородов, большая часть которых приходилась на промежу-

Таблица 1

№№ п. п.	Условия опытов *			Выход алкилата на взятый этилен, %	Содержание в алкилате, вес. %		
	давление атм.	цикло-гексан: этилен, мол.	скорость пропуска-ния смеси, мл/мин.		фракции моноэтил-цикло-гексана	фракции диэтил-цикло-гексана	остат ка
1	100	3,0	1,6	89	34	14	26
2	200	3,0	0,3	225	46	—	—
3	200	3,9	1,5	240	51	20	20
4	450	3,0	0,5	230	50	—	—
5	200	1,2	1,7	150	34	16	32
6	200 **	2,0	0,6	176	28	9	44
7	200	2,1	3,3	220	27	16	38
8	200	4,4	3,4	230	41	20	26

\* 1—6 проводились с  $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$ ; 7,8 в присутствии кварца.

\*\* При 400°.

очные фракции и остаток. Фракция моноэтилциклогексана содержала 3,4% . фракция диэтилциклогексана 13% непредельных углеводородов, природа которых не изучалась.

Из табл. 1 видно (опыты велись при 450°), что при увеличении концентрации этилена в исходной смеси выход моноэтилциклогексана снижался, выход вышекипящего остатка возрастал. Подобное же действие оказывает уменьшение объемной скорости пропускания смеси.

Таблица 2

№№ п.п.	Т-ра, °С	Условия опытов			Степень превращения олефина, %	Выход алкилата на взятый олефин, %	Содержание в алкилате, вес. %	
		давление, атм.	циклогексан: олефин, мол.	объемн. скорость пропускания смеси, час <sup>-1</sup>			фракции моноалкилциклогексана	остатка

Алкилирование пропиленом

9	450	200	2,8	1,60	32	96	28	51
10	450	200	3,7	1,45	30	93	41	45
11	500	450	3,0	1,20	70	206	31	56
12	500	450	5,0	1,45	70	180	53	34

Алкилирование изобутиленом

13	450	200	1,9	1,17	—	85	39	35
14	450	450	3,0	1,19	—	180	44	38
15	450	450	2,7	1,31	31	150	42	38

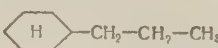
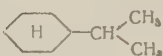
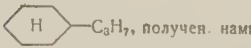
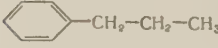
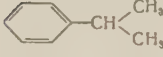
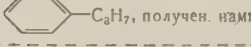
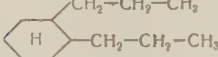
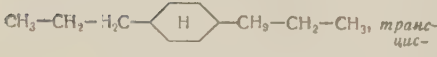
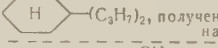
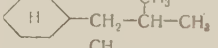
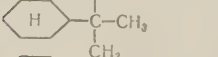
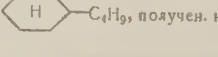
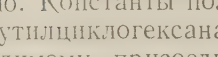
Алкилирование пропиленом. Применялась пропилен-пропановая фракция, содержавшая 13% пропана. Из табл. 2 видно, что при 200 атм. степень превращения пропилена (30%) и выход алкилата (93—96%) значительно ниже, чем с этиленом. При 450 атм. и 500° степень превращения пропилена и выход алкилата возросли. Из алкилатов разгонкой выделялись: легкокипящая фракция I продуктов крекинга, фракция II с т. кип. 150—157° и остаток. После отделения непредельных (5%) фракция II имела:  $n_D^{20}$  1,4370,  $d_4^{20}$  0,7929. По (5) для *n*-пропилциклогексана; т. кип. 156,72°,  $n_D^{20}$  1,4370,  $d_4^{20}$  0,7936. После дегидрирования на Pt/C разгонкой и хроматографированием был выделен продукт (48%) с т. кип. 158,2—158,5°,  $n_D^{20}$  1,4903,  $d_4^{20}$  0,8612. По (5) для *n*-пропилбензола: т. кип. 159,22°,  $n_D^{20}$  1,4920  $d_4^{20}$  0,8620. Из остатка разгонкой и хроматографированием на силикагеле был выделен углеводород с т. кип. 209—211°/739 мм,  $n_D^{20}$  1,4481,  $d_4^{20}$  0,8102, вес которого составил примерно 30% от веса остатка. Эти свойства близки к свойствам ди-*n*-пропилциклогексана. По (8) для 1,2-изомера: т. кип. 214,7—215°,  $n_D^{20}$  1,4510,  $d_4^{20}$  0,8188, а для 1,4-изомера: транс—т. кип. 220°,  $n_D^{20}$  1,4440,  $d_4^{20}$  0,8030; цис—т. кип. 221°,  $n_D^{20}$  1,4480,  $d_4^{20}$  0,8138 (9).

Из сравнения результатов опытов 9 и 11 на кварце и 10 и 12 на Са<sub>3</sub>(РО<sub>4</sub>)<sub>2</sub> видно, что в присутствии фосфата содержание монопропилциклогексана в алкилате выше, а ди- и полизамещенного ниже.

Опыты с изобутиленом проводились в присутствии кварца. Степень превращения изобутилена была ниже, чем пропилена. Из алкилата разгонкой была выделена фракция с т. кип. 168—183°. После отделения от непредельных (бромное число 11—12) и разгонки из нее был получен углеводород (57%) с т. кип. 171—172°/742 мм,  $n_D^{20}$  1,4393,  $d_4^{20}$  0,7942. По (5) для изобутилциклогексана т. кип. 171,32°,  $n_D^{20}$  1,4386,  $d_4^{20}$  0,7952.

В табл. 3 приведены константы углеводородов нормальной и изо-структуры, взятые из (5) и полученные нами. Из табл. 3 видно, что константы полученного пропилбензола близки к константам углеводорода с нормальной

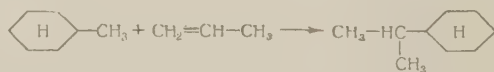
Таблица 3

Углеводороды	Т-ра кип., °С	$d_4^{20}$	$n_D^{20}$
	156,72	0,7936	1,4370
	154,56	0,8022	1,4409
	155—156	0,7929	1,4370
<hr/>			
	159,22	0,8620	1,4920
	152,39	0,8618	1,4915
	158,2—158,5	0,8612	1,4903
<hr/>			
	214,7—215,0	0,8188	1,4510
	220	0,8030	1,4440
	221	0,8138	1,4480
	209—211 (739 мм)	0,8102	1,4481
<hr/>			
	171,32	0,7952	1,4386
	171,59	0,8127	1,4469
	171—172 (742 мм)	0,7942	1,4393

боковой цепью. Константы полученного бутилциклогексана близки к константам изобутилциклогексана. Таким образом, в обоих случаях циклогексан, по-видимому, присоединяется к крайнему ненасыщенному С-атому олефина:



В отличие от этого, при кислотном алкилировании метилциклогексана пропиленом был получен метилизопропилциклогексан<sup>(3)</sup>, т. е. циклан присоединяется к среднему ненасыщенному С-атому олефина:



Институт органической химии  
им. Н. Д. Зелинского  
Академии наук СССР

Поступило  
1 XI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> H. Pines, N. Ipatieff, J. Am. Chem. Soc., **67**, 1631 (1945). <sup>2</sup> Ю. Г. Мамедалиев, Аладдин Кулиев, ДАН, **88**, 471 (1953). <sup>3</sup> Ю. Г. Мамедалиев, З. А. Мамедова, ДАН, **112**, 1063 (1957). <sup>4</sup> Л. Х. Фрейдлин, А. А. Баландин, Н. М. Назарова, ДАН, **96**, № 5, 1011 (1954). <sup>5</sup> Р. Д. Оболенцев, Физические константы углеводородов жидких топлив и масел, М.—Л., 1953. <sup>6</sup> J. F. Norris, G. T. Vaala, J. Am. Chem. Soc., **61**, 2131 (1939). <sup>7</sup> Б. Д. Молдавский, Г. Д. Каушер, М. В. Кобыльская, ЖОХ, **7**, 169 (1937). <sup>8</sup> В. В. Elsner, H. E. Strauss, T. J. Farbers, J. Chem. Soc., **1957**, 578. <sup>9</sup> А. Л. Либерман, Н. И. Тюнькина, Б. А. Казанский, ДАН, **134**, № 3, 603 (1960).

Член-корреспондент АН СССР Р. Х. ФРЕЙДЛИНА, Г. Т. МАРТИРОСЯН  
и академик А. Н. НЕСМЕЯНОВ

# ПРИСОЕДИНЕНИЕ ТРИХЛОРБРОММЕТАНА К СОЕДИНЕНИЯМ СТРОЕНИЯ $R(C_6H_5)_2ECH = CH_2$ (где $R = C_6H_5, CH_3$ ; $E = Sn, Si, C$ )

В последние годы подробно изучены перегруппировки радикалов в растворе с 1,2-миграцией фенила от одного атома углерода к другому (см., например, (1)) по схеме



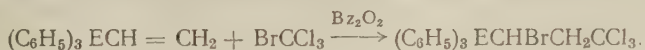
Аналогичная перегруппировка с 1,2-миграцией фенила от атома металла к атому углерода неизвестна.

Настоящая работа посвящена изучению способности к перегруппировке в растворе радикалов строения



С этой целью изучено присоединение трихлорбромметана к винилтрифенилстаннану \*, винилтрифенилсилану \*\* и 3,3-дифенилбутену-1 \*\*\*. 3,3-Дифенилбутен-1 избран для исследования в связи с его большей доступностью по сравнению с винилтрифенилметаном.

Присоединение трихлорбромметана к винилтрифенилстаннану и винилтрифенилсилану идет очень легко и с почти количественным выходом образуются неперегруппированные продукты присоединения по схеме



Строение полученных соединений подтверждается отсутствием связи  $E-Br$  \*\*\*\* (отрицательная проба с  $AgNO_3$  и др.), а также отношением полученных аддуктов к действию спиртовой щелочи. Оловоорганическое соединение не гидролизуются, а претерпевает дегидробромирование по схеме



Кремнеорганическое соединение, как и следовало ожидать для  $\alpha$ -галогид-алкилсилана (5), инертно к действию спиртовой щелочи при комнатной температуре.

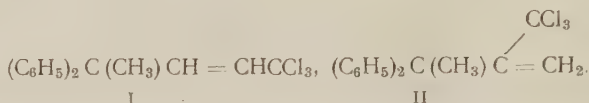
\* Кратко сообщено (2) о получении продукта присоединения трихлорбромметана к винилтриэтилстаннану, строение аддукта не исследовано.

\*\* Описано (3) присоединение хлороформа и четыреххлористого углерода к винилтрифенилсилану; при этом получены соединения строения  $(C_6H_5)_3Si(CH_2)_2CCl_3$  и  $(C_6H_5)_3SiCHClCH_2CCl_3$ .

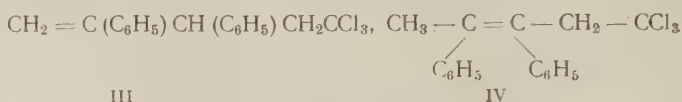
\*\*\* Гомолитическое присоединение *n*-бутилмеркаптана и тиоуксусной кислоты к 3,3-дифенилбутену-1 приводит к неперегруппированным продуктам; присоединение *n*-масляного альдегида течет с перегруппировкой в промежуточно образующемся радикале с 1,2-миграцией фенила (4).

\*\*\*\* В случае наступления перегруппировки можно было ожидать образования соединений строения  $(C_6H_5)_2EBrCH(C_6H_5)CH_2CCl_3$ .

Присоединение трихлорбромметана к 3,3-дифенилбутену-1 идет с трудом. После 20-часового кипячения реакционной смеси при многократном добавлении перекиси 66% исходного дифенилбутена вернулось в неизменном виде. Главным продуктом реакции является непредельное соединение состава  $C_{17}H_{15}Cl_3$ . При озоноллизе этого соединения получен формальдегид и кетон состава  $C_{16}H_{13}Cl_3O$ , давший 2,4-динитрофенилгидразон состава  $C_{22}H_{17}Cl_3N_4O_4$ . В случае, если изучаемая реакция течет без перегруппировки, можно ожидать образование непредельного соединения строения I или II:



В случае течения реакции с перегруппировкой можно ожидать образования соединений III или IV:

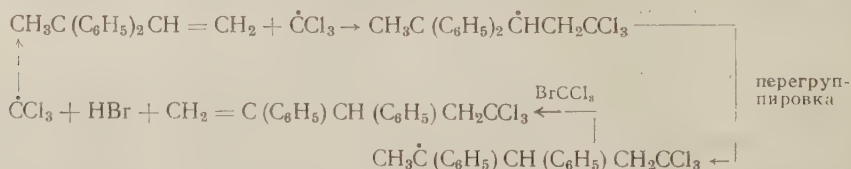


Приведенные выше данные, характеризующие полученное соединение, совместимы только с формулой III.

Соединения I и IV не могут обусловить образование формальдегида и указанного кетона при озоноллизе. Образование соединения II крайне маловероятно, так как потребовало бы присоединения  $CCl_3$ -радикала, вопреки известным правилам ориентации. Кроме того, соединение II, хотя и способно образовать формальдегид и кетон состава  $C_{16}H_{13}Cl_3O$  при озоноллизе, однако полученный в этом случае кетон имел бы строение  $(C_6H_5)_2C(CH_3)COCCl_3$  и, следовательно, не мог бы дать 2,4-динитрофенилгидразон состава  $C_{22}H_{17}Cl_3N_4O_4$ , так как известно <sup>(6)</sup>, что карбонильные соединения, имеющие

группировку  $CCl_3C=O$ , при взаимодействии с динитрофенилгидразином в присутствии серной кислоты дают гидразоны, не содержащие хлора.

Образование вещества III в процессе изучаемой реакции может быть описано схемой



Одновременно с веществом III с небольшим выходом получен предельный аддукт, строение которого не исследовано. Таким образом, в сравнимых условиях радикалы строения  $(C_6H_5)_3\dot{E}CHCH_2CCl_3$  ( $E = Sn, Si$ ) не перегруппировались, а радикалы строения  $(C_6H_5)_2C(CH_3)\dot{C}HCH_2CCl_3$  перегруппировались. Возможной причиной этого различия может быть либо меньшая стабильность радикалов типа  $(C_6H_5)_2\dot{E}CH(C_6H_5)CH_2CCl_3$  по сравнению с исходными радикалами  $(C_6H_5)_3\dot{E}CHCH_2CCl_3$ , либо атомы олова и кремния менее способны передавать влияние, создаваемое наличием нечетного электрона у соседнего углеродного атома, фенильной группе.

### Экспериментальная часть

Присоединение трихлорбромметана к винилтрифенилстаннану в присутствии перекиси бензоила. Раствор 9,42 г (0,025 моля) винилтрифенилстаннана (полученного по <sup>(7)</sup>), 10 г трихлорбромметана и 0,15 г перекиси бензоила нагревали на водяной бане при температуре 80° в течение 7 час. За это время к реак-

онному раствору было прибавлено еще 0,15 г перекиси бензоила в 10 г трихлорбромметана. После отгонки избытка трихлорбромметана остается 3 г густого масла, из которого растворением в абсолютном спирте и охлаждением до  $-40^{\circ}$  выделен  $\gamma, \gamma, \gamma$ -трихлор- $\alpha$ -бромпропилтрифенилстаннана в виде кристаллов с т. пл.  $58-60^{\circ}$ , выход 13,5 г (94% от теории); после перекристаллизации из спирта т. пл.  $61-62^{\circ}$ .

Найдено %: C 43,76; 43,58; H 3,15; 3,20  
 $C_{21}H_{18}SnCl_3Br$ . Вычислено %: C 44,02; H 3,15

Полученное соединение не реагирует с фтористым калием, нитратом серебра, а также не образует комплексного соединения с пиридином.

Взаимодействие  $\gamma, \gamma, \gamma$ -трихлор- $\alpha$ -бромпропилтрифенилстаннана со щелочью. К раствору 4,80 г (0,008 моля)  $\gamma, \gamma, \gamma$ -трихлор- $\alpha$ -бромпропилтрифенилстаннана в 120 мл этилового спирта, охлажденному до  $0^{\circ}$ , прибавлено 0,45 г (0,008 моля) едкого кали, 6 мл этилового спирта. Реакционную смесь оставили на ночь при комнатной температуре. При этом прошла полная нейтрализация. Выпали кристаллы  $\gamma, \gamma, \gamma$ -трихлорпропен-1-илтрифенилстаннана, которые после двукратной перекристаллизации из спирта имели т. пл.  $132^{\circ}$ . Выход 3,35 г (90% от теории)

Найдено %: C 50,33; 50,31; H 3,41; 3,41; Sn 23,73; 23,72  
 $C_{21}H_{17}SnCl_3$ . Вычислено %: C 50,90; H 3,44; Sn 24,00

Присоединение трихлорбромметана к винилтрифенилсилану в присутствии перекиси бензоила. Раствор 7,15 г (0,025 моля) винилтрифенилсилана (полученного по методу (8)), 10 г трихлорбромметана и 0,15 г перекиси бензоила нагревали на водяной бане при  $80^{\circ}$  в течение 7 час. За это время к реакционному раствору было прибавлено еще 0,15 г перекиси бензоила в 10 г трихлорбромметана. После отгонки избытка трихлорбромметана получено 11,9 г масла, которое хорошо растворяется в эфире и бензоле. После кристаллизации из спирта получено 11,3 г (94,1% от теории)  $\gamma, \gamma, \gamma$ -трихлор- $\alpha$ -бромпропилтрифенилсилана с т. пл.  $98-102^{\circ}$ . После вторичной перекристаллизации из спирта т. пл.  $102-103^{\circ}$ .

Найдено %: C 52,09; 52,00; H 3,72; 3,71; Si 5,87; 5,72; Hal 38,43; 38,69  
 $H_{18}SiCl_3Br$ . Вычислено %: C 52,03; H 3,74; Si 5,74; Hal 38,39

Полученное соединение не реагирует с раствором нитрата серебра, а также остается без изменения при действии спиртовой щелочи в течение 24 час. при комнатной температуре.

3,3-Дифенилбутен-1. Синтез осуществлен по известной схеме<sup>(4)</sup> \*, продукт имел константы: т. кип.  $92-94^{\circ}$  при 1 мм,  $n_D^{25} 1,5770$ ;  $n_D^{20} 1,5790$ ;  $d_4^{20} 1,0106$ . Найдено  $MR 68,49$ . Вычислено для  $C_{16}H_{16}F_7$   $MR 68,42$ . Литературные данные<sup>(4)</sup>: т. кип.  $111-115^{\circ}$  при 1,5 мм,  $n_D^{25} 1,5780$ . Раствор 5 г 3,3-дифенилбутена-1 в 100 г четыреххлористого углерода при охлаждении льдом насыщали 6% озоном в течение 3 час. После прибавления озона в вакууме отогнан четыреххлористый углерод, после чего озонид был удален нагреванием на кипящей водяной бане. Экстрагированием эфиром получено 2,1 г (84% от теории)  $\alpha, \alpha$ -дифенилпропиоальдегида с т. кип.  $111-113^{\circ}$  при 1 мм,  $n_D^{20} 1,5820$ ;  $d_4^{20} 1,0810$ . Найдено  $MR 64,85$ . Вычислено для  $C_{15}H_{14}O$   $MR 64,25$ . По литературным данным<sup>(9)</sup> т. кип.  $\alpha, \alpha$ -дифенилпропиоальдегида  $111-113^{\circ}$  при 1 мм,  $n_D^{20} 1,5800$ . Из водного слоя получено медоновое производное с т. пл.  $189^{\circ}$ , не дающее депрессии температуры

\* В отличие от прописи полученный после разложения ксантогената продукт был перегнан, без предварительной перегонки, нагреванию с 5% водной щелочью в течение 2 час. После перегонки продукта операция обработки щелочью повторена, при этом получен 3,3-дифенилбутен-1 с выходом 72,5% от теории (по прописи 50,7% от теории).

плавления в смеси с димедоновым производным формальдегида. Этим подтверждается строение исходного 3,3-дифенилбутена-1.

Взаимодействие трихлорбромметана с 3,3-дифенилбутеном-1 в присутствии перекиси бензоила. Раствор 25 г (0,12 моля) 3,3-дифенилбутена-1, 100 г трихлорбромметана и 0,4 г перекиси бензоила кипятили в течение 20 час.; через каждые 3 часа прибавляли по 0,4 г перекиси бензоила. Всего за 20 час. прибавлено 3 г перекиси. Через 15—20 мин. от начала нагревания начинается выделение бромистого водорода. По окончании реакции смесь была промыта раствором соды, затем водой и высушена над сульфатом магния, избыток трихлорбромметана отогнан. Перегонкой остатка получены:

I фракция. 92—94° (1 мм), 15 г,  $n_D^{25}$  1,5770 (исходное вещество).

II фракция. 94—180° (1 мм), 10,5 г.

Остаток 3 г.

После вторичной перегонки II фракции при 1 мм получено:

I фракция. 92—95°, 1,5 г,  $n_D^{25}$  1,5770.

II фракция. 95—142°, 0,5 г.

III фракция. 142—150°, 6,5 г.

IV фракция. 160—170°, 1 г.

Остаток 1 г.

После вторичной перегонки III фракции получено 4,5 г 5,5,5-трихлор-2,3-дифенилпентена-1, т. кип. 142—142,5° при 1 мм,  $n_D^{20}$  1,5935;  $d_4^{20}$  1,243.

Найдено  $MR$  88,74. Вычислено для  $C_{17}H_{15}Cl_3F_7$   $MR$  87,64.

Как показал анализ, полученное вещество содержит незначительную примесь предельного бромида.

Найдено %: С 61,50; Н 4,65; Hal 34,04  
 $C_{17}H_{15}Cl_3$ . Вычислено %: С 62,69; Н 4,64; Hal 32,66

Раствор 2,6 г 5,5,5-трихлор-2,3-дифенилпентена-1 в 100 г четыреххлористого углерода при охлаждении льдом насыщали 6% озоном в течение 4 час. После прибавления воды  $CCl_4$  отогнан в вакууме. Озонид разложен нагреванием на кипящей водяной бане. Экстрагированием эфиром получено 2,3 г (88,5% теории) белых кристаллов с т. пл. 103°.

Найдено %: С 58,77; 58,42; Н 4,06; 4,09; Cl 32,67; 32,77  
 $C_{16}H_{13}Cl_3O$ . Вычислено %: С 58,65; Н 4,00; Cl 32,47

Эти кристаллы с 2,4-динитрофенилгидразином образуют 2,4-динитрофенилгидразон с т. пл. 161° (из спирта).

Найдено %: С 51,71; 51,94; Н 3,55; 3,65; N 10,72; 10,77  
 $C_{22}H_{17}N_4Cl_3O_4$ . Вычислено %: С 52,03; Н 3,38; N 11,03

Из водного слоя получено димедоновое производное с т. пл. 189°, не дающее депрессии температуры плавления в смеси с димедоновым производным формальдегида.

Из фракции IV растворением в небольшом количестве эфира и охлаждением получены кристаллы предельного продукта присоединения с т. пл. 103°.

Найдено %: С 50,60; 50,36; Н 4,02; 4,04; Hal 45,85; 45,73  
 $C_{17}H_{15}Cl_3Br$ . Вычислено %: С 50,22; Н 3,96; Hal 45,83

Поступило  
24 XII 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> D. Y. Curtin, M. J. Hurwitz, J. Am. Chem. Soc., **74**, 5381 (1952). <sup>2</sup> Seyferth, J. Org. Chem. Soc., **22**, 1252 (1957). <sup>3</sup> R. A. Benkeser, E. W. Bennett, R. A. Huckner, J. Am. Chem. Soc., **79**, 6253 (1957). <sup>4</sup> J. Weinstock, S. H. Lewis, J. Am. Chem. Soc., **79**, 6243 (1947). <sup>5</sup> С. Н. Ушаков, А. М. Игнатьев, ЖОХ, **7**, № 19, 2495 (1937). <sup>6</sup> F. D. Chattaway, R. Bennett, J. Chem. Soc., **1927**, 2850. <sup>7</sup> S. D. Rosenberg, A. I. Gibbons et al., J. Am. Chem. Soc., **79**, 2137 (1957). <sup>8</sup> L. F. Cason, H. G. Brooks, J. Am. Chem. Soc., **74**, 4 (1952). <sup>9</sup> F. D. Greene, J. Am. Chem. Soc., **77**, 4869 (1955).

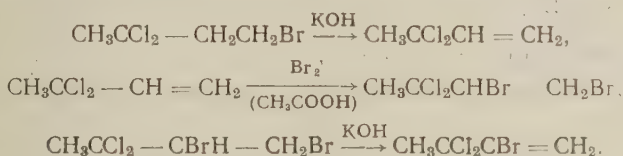
М. Я. ХОРЛИНА и В. Н. КОСТ

# ГОМОЛИТИЧЕСКАЯ ИЗОМЕРИЗАЦИЯ 2-БРОМ-3,3-ДИХЛОРБУТЕНА-1

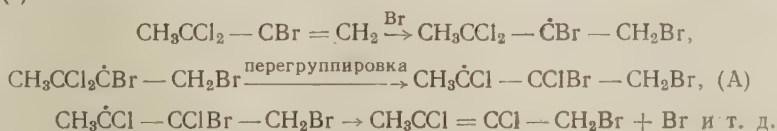
(Представлено академиком А. Н. Несмеяновым 23 XI 1960)

Как было показано ранее, 2-бром-3,3,3-трихлорпропен после некоторого индукционного периода или при освещении у.-ф. светом изомеризуется в 3-бром-1,1,2-трихлорпропен-1. Это превращение было истолковано как результат гомолитической перегруппировки <sup>(1)</sup>.

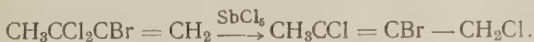
В данной работе была исследована способность к изомеризации 2-бром-3,3-дихлорбутена-1, который был получен по схеме



При стоянии или при освещении у.-ф. светом образец соединения  $\text{CH}_3\text{CCl}_2\text{CBr} = \text{CH}_2$  изомеризуется в  $\text{CH}_3\text{CCl} = \text{CCl} - \text{CH}_2\text{Br}$ , который с уксусной кислотой образует производное, не содержащее брома, выделенное в виде пикрата. Данная изомеризация может быть описана схемой (А), вполне аналогичной схеме перегруппировки 2-бром-3,3,3-трихлорпропена <sup>(1)</sup>:



Добавление гидрохинона препятствует такой изомеризации. Под действием  $\text{SbCl}_5$   $\text{CH}_3\text{CCl}_2\text{CBr} = \text{CH}_2$  претерпевает анионотропную алкильную перегруппировку по схеме



Бром-1,3-дихлорбутен-2 выделен в виде пикрата изотиуриониевого производного.

Строение  $\text{CH}_3\text{CCl}_2\text{CBr} = \text{CH}_2$  подтверждено получением диметиламинного производного  $\text{CH}_3\text{CCl} = \text{CBr} - \text{CH}_2\text{N}(\text{CH}_3)_2$ , идентифицированного в виде пикрата. Такой же амин  $\text{CH}_3\text{CCl} = \text{CBr} - \text{CH}_2\text{N}(\text{CH}_3)_2$  получен двумя путями: взаимодействием избытка диметиламина с 1,2-дибром-3,3-дихлорбутаном по схеме



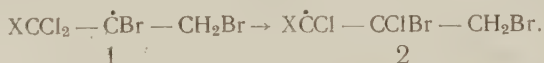
или взаимодействием 2,3-дибром-1,3-дихлорбутана, полученного бромированием  $\text{CH}_3\text{CCl} = \text{CH} - \text{CH}_2\text{Cl}$ , с диметиламином.

Далее было изучено взаимодействие бромистого водорода с  $\text{CH}_3\text{CCl}_2\text{CBr} = \text{CH}_2$  в присутствии перекиси бензоила. В качестве единственного продукта реакции с 90% выходом была получена смесь изомеров строения

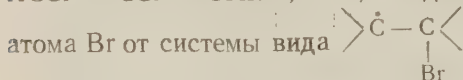
$\text{CH}_3\text{CCl} = \text{CCl} - \text{CH}_2\text{Br}$ . Указанная реакция, вероятно, протекает по схеме, аналогичной (А). В данном случае бромистый водород является источником атомов брома, инициирующих процесс гомолитической изомеризации.

Из смеси  $\text{CH}_3\text{CCl} = \text{CCl} - \text{CH}_2\text{Br}$  взаимодействием с диметиламином были получены амины  $\text{CH}_3\text{CCl} = \text{CCl} - \text{CH}_2\text{N}(\text{CH}_3)_2$ , выделенные в виде пикратов, которые не содержат брома, что подтверждает указанное строение дихлорбромбутена. Во всех приведенных выше реакциях, в которых образуются неопределенные соединения строения  $\text{CH}_3\text{CCl} = \text{CX} - \text{CH}_2\text{Y}$ , где  $\text{X} = \text{Cl}$  или  $\text{Br}$ ,  $\text{Y} = \text{Br}$  или  $\text{N}(\text{CH}_3)_2$ , отмечено появление цис-транс-изомеров. Но в данной работе стереохимия этих реакций ближе не изучалась.

Таким образом, вещества строения  $\text{XCCl}_2 - \text{CBr} - \text{CH}_2$ , где  $\text{X} = \text{Cl}$  или  $\text{CH}_3$ , под влиянием радикальных агентов претерпевают гомолитическую изомеризацию в  $\text{XCCl} = \text{CCl} - \text{CH}_2\text{Br}$ , сопровождающуюся 1,2-миграцией хлора в промежуточно образующихся радикалах:



Радикалы строения 2 стабилизируются с образованием неопределенного  $\text{XCCl} = \text{CCl} - \text{CH}_2\text{Br}$ , что, видимо, связано с легкостью отщепления

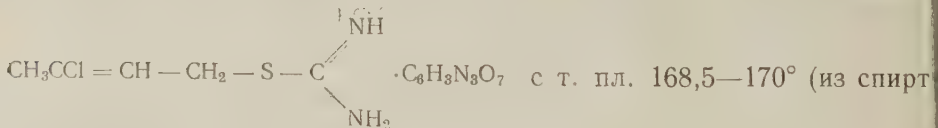


### Экспериментальная часть

1. Получение 3,3-дихлорбутена-1. Дегидробромирование 135 г 1-бром-3,3-дихлорбутана 45,9 г КОН в этилцеллозолье при перемешивании при 0°. После обычной обработки при перегонке на колонке было получено 35,5 г 3,3-дихлорбутена-1 (43% от теории); т. кип. 45° при 105 мм;  $n_D^{20}$  1,4460;  $d_4^{20}$  1,1043; найдено  $MR$  30,16, вычислено 29,94.

Найдено %: С 38,25; 38,44; Н 4,96; 4,76  
 $\text{C}_4\text{H}_6\text{Cl}_2$ . Вычислено %: С 38,43; Н 4,84

При нагревании с тиомочевинной в течение нескольких минут в спиртовом растворе выделено тиомочевинное производное в виде пикрата



Найдено %: С 33,33; 33,56; Н 3,19; 3,14; N 17,74; 17,60  
 $\text{C}_{11}\text{H}_{12}\text{ClN}_5\text{O}_7\text{S}$ . Вычислено %: С 33,55; Н 3,07; N 17,78.

Смешанная проба с пикратом изотиомочевинного производного, полученного из  $\text{CH}_3\text{CCl} = \text{CH} - \text{CH}_2\text{Cl}$ , депрессии температуры плавления не дала.

2. Бромирование 3,3-дихлорбутена-1. К 90 г  $\text{CH}_3\text{CCl}_2\text{CH} = \text{CH}_2$  в 100 мл ледяной уксусной кислоты по каплям был прибавлен 34,2 мл брома. После обычной обработки 1,2-дибром-3,3-дихлорбутан был перегнан на колонке в интервале 79—80° при 4 мм, вес 158 г (77% от теории);  $n_D^{20}$  1,5435;  $d_4^{20}$  1,9810; найдено  $MR$  45,35, вычислено 45,94.

Найдено %: С 16,77; 17,00; Н 2,08; 2,18  
 $\text{C}_6\text{H}_4\text{Br}_2\text{Cl}_2$ . Вычислено %: С 16,52; Н 2,12

При обработке избытком диметиламина получен непредельный амин  $\text{CH}_3\text{CCl} = \text{CBr}-\text{CH}_2\text{N}(\text{CH}_3)_2$ , перегнанный в интервале  $82-87^\circ$  при 20 мм,  $n_D^{20}$  1,4996—1,5006. Выделены пикраты с т. пл.  $153-154^\circ$  (из спирта). Найдено %: N 12,62; 12,68. Найдено т. пл.  $160-161^\circ$ .

Найдено %: N 12,62; 12,82  
 $\text{C}_{12}\text{H}_{14}\text{BrClN}_4\text{O}_7$ . Вычислено %: N 12,68 (ср. с опытом 4)

3. Получение 2-бром-3,3-дихлорбутена-1 и его свойства. Дегидробромировали 127 г 1,2-дибром-3,3-дихлорбутана 34,2 г КОН в этилцеллозольве аналогично опыту 1. При перегонке на колонке получено 58 г (59% от теории) 2-бром-3,3-дихлорбутена-1 с т. кип.  $61-62^\circ$  при 25 мм;  $n_D^{20}$  1,5120;  $d_4^{20}$  1,6363; найдено  $MR$  37,88, вычислено 37,70.

Найдено %: C 24,00; 23,82; H 2,53; 2,44  
 $\text{C}_4\text{H}_5\text{BrCl}_2$ . Вычислено %: C 23,56; H 2,47

При стоянии без добавки гидрохинона вещество становится слезоточивым,  $n_D^{20}$  1,5300; с гидрохиноном не изомеризуется. 2-Бром-3,3-дихлорбутен-1, предварительно перегнанный ( $n_D^{20}$  1,5130), был подвергнут у-ф.; облучению. Через 10 мин.  $n_D^{20}$  1,5280; еще через 20 мин.  $n_D^{20}$  1,5320. Вещество было перегнано в интервале  $77-80^\circ$  при 25 мм;  $n_D^{20}$  1,5340;  $d_4^{20}$  1,6674; найдено  $MR$  38,01, вычислено 37,70.

Пикрат изотиомочевинного производного плавился при  $194,5-195^\circ$  (из спирта).

Найдено %: C 30,47; 30,73; H 2,55; 2,77; N 16,54; 16,54  
 $\text{C}_{11}\text{H}_{11}\text{Cl}_2\text{N}_5\text{O}_7\text{S}$ . Вычислено %: C 30,85; H 2,59; N 16,35

При обработке 2-бром-3,3-дихлорбутена-1  $\text{SbCl}_5$  был получен изомер, который перегонялся в интервале  $75-80^\circ$  при 24 мм,  $n_D^{20}$  1,5380, из которого взаимодействием с тиомочевинной было получено изотиомочевинное производное в виде пикрата с т. пл.  $185^\circ$  с разложением (из спирта).

Найдено %: C 28,44; 28,55; H 2,33; 2,52  
 $\text{C}_{11}\text{H}_{11}\text{ClBrN}_5\text{O}_7\text{S}$ . Вычислено %: C 27,95; H 2,35

4. Взаимодействие 2-бром-3,3-дихлорбутена-1 с диметиламином. а) Раствор 7,9 г 2-бром-3,3-дихлорбутена-1, полученного, как описано в опыте 3, в 20 мл спирта, был нагрет в запаянной ампуле с избытком диметиламина в течение нескольких часов при  $100^\circ$ . После обычной обработки диметил-2-бром-3-хлорбутен-2-ил-амин был перегнан при  $81-83^\circ$  при 20 мм, 5,6 г (68% от теории);  $n_D^{20}$  1,4994;  $d_4^{20}$  1,3507; найдено  $MR$  46,23, вычислено 46,01. Пикрат т. пл.  $153-154^\circ$  (из спирта).

Найдено %: C 32,60; 32,84; H 3,13; 3,19; N 12,81; 13,00  
 $\text{C}_{12}\text{H}_{14}\text{BrClN}_4\text{O}_7$ . Вычислено %: C 32,66; H 3,19; N 12,68

Смешанная проба этого пикрата с образцом соответствующего соединения из опыта 2 депрессии температуры плавления не показала.

б) Получен пикрат амина строения  $\text{CH}_3\text{CCl} = \text{CBr}-\text{CH}_2\text{N}(\text{CH}_3)_2$ , стереоизомерный описанному выше, взаимодействием избытка диметиламина с 1,3-дихлор-2,3-дибромбутаном, который, в свою очередь, был получен бромированием 1,3-дихлорбутена-2. Константы  $\text{CH}_3\text{CClBr}-\text{CHBr}-\text{CH}_2\text{Cl}$ : т. кип.  $88^\circ$  при 8 мм;  $n_D^{20}$  1,5502;  $d_4^{20}$  1,9910; найдено  $MR$  45,59, вычислено 45,94.

Найдено %: C 16,98; 16,90; H 2,03; 2,01; Cl 25,08; Br 55,76  
 $\text{C}_4\text{H}_6\text{Br}_2\text{Cl}_2$ . Вычислено %: C 16,52; H 2,12; Cl 24,89; Br 56,11

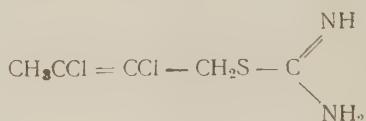
Полученный амин был перегнан при 58—60° при 4 мм;  $n_D^{20}$  1,5030; т. пл. пикрата 166—167° (из спирта).

Найдено %: С 32,66; 32,68; Н 3,11; 3,18; N 13,08; 13,07  
 $C_{12}H_{14}BrClN_4O_7$ . Вычислено %: С 32,63; Н 3,19; N 12,68

Взаимодействие  $НВг$  с  $CH_3CCl_2CBr = CH_2$  в присутствии перекиси бензоила. Раствор 36,5 г 2-бром-3,3-дихлорбутена-1 и 0,5 перекиси бензоила в 112 г четыреххлористого углерода был насыщен бромистым водородом в течение 30 мин. Реакционный продукт промыт раствором соды, водой, высушен над  $CaCl_2$ . После отгонки растворителя и перегонки на колонке было получено 31,4 г (90% от теории) 1-бром-2,3-дихлорбутена-2 (смесь цис-транс-изомеров) с т. кип. 64—70° при 15 мм;  $n_D^{20}$  1,5310—1,5323;  $d_4^{20}$  1,6519—1,6775; найдено  $MR$  38,20—37,88, вычислено 37,70.

Найдено %: С 23,60; 23,76; Н 2,32; 2,42  
 $C_4H_7BrCl_2$ . Вычислено %: С 23,56; Н 2,47

Взаимодействием с тиомочевинной получено



выделенное в виде пикрата с т. пл. 197° (из спирта).

Найдено %: N 16,56; 16,50; Cl 16,48; 16,33  
 $C_{11}H_{11}Cl_2N_2O_7S$ . Вычислено %: N 16,35; Cl 16,56

При обработке смеси 1-бром-2,3-дихлорбутенов-2 диметиламином в спирте с хорошим выходом получена смесь стереоизомерных аминов строения  $CH_3CCl = CCl - CH_2N(CH_3)_2$ , из которой выделена фракция с т. кип. 65—68° при 20 мм;  $n_D^{20}$  1,4720; т. пл. пикрата 144—145° (из спирта).

Найдено %: С 36,25; 36,25; Н 3,30; 3,37; N 14,39; 14,29 и фракция с т. кип. 75—77° при 20 мм;  $n_D^{20}$  1,4750; т. пл. пикрата 160—161° (из спирта).

Найдено %: С 35,90; 35,89; Н 3,68; 3,54; N 14,17; 14,19  
 $C_{12}H_{14}Cl_2N_4O_7$ . Вычислено %: С 36,28; Н 3,55; N 14,11

Институт элементоорганических соединений  
 Академии наук СССР

Поступило  
 10 XI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

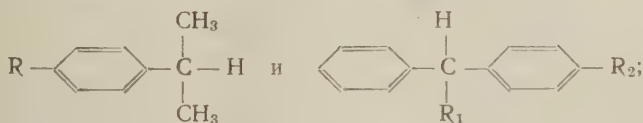
<sup>1</sup> А. Н. Несмеянов, Р. Х. Фрейдлина, В. Н. Кост, **113**, 828 (1957).

Т. И. ЮРЖЕНКО и М. А. ДИКИЙ

# ИССЛЕДОВАНИЕ АВТООКИСЛЕНИЯ АЛКИЛ- И ГАЛОИДОПРОИЗВОДНЫХ 1,1-ДИФЕНИЛЭТАНА И ИЗОПРОПИЛБЕНЗОЛА

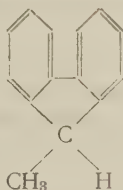
(Представлено академиком В. Н. Кондратьевым 30 XI 1960)

В предыдущих работах (1-5) показано, что при автоокислении 1,1-дифенилэтана и его некоторых алкилпроизводных получают соответствующие гидроперекиси. В развитие этих работ было интересно провести исследования по получению гидроперекисей галоидопроизводных арильных углеводородов, а также более обстоятельное изучение самого процесса автоокисления исходных арильных углеводородов и галоидопроизводных в связи с их строением. Настоящей работой преследовалась цель изучить влияние арильных и алкильных радикалов, а также галоидов на скорость автоокислительного процесса. Для исследования были выбраны соединения следующей структуры



R = H, Cl, Br, J; R<sub>1</sub> = CH<sub>3</sub>, C<sub>2</sub>H<sub>5</sub>, *n*-C<sub>3</sub>H<sub>7</sub>; R<sub>2</sub> = H, CH<sub>3</sub>, C<sub>2</sub>H<sub>5</sub>, *изо*-C<sub>3</sub>H<sub>7</sub>, трет.-C<sub>4</sub>H<sub>9</sub>, а также Cl, Br, J.

Кроме этого, для сравнения исследовался и 9-метилфлуорен:



Соединения данной структуры получались разными методами. Изопропилбензол готовился из технического путем тщательной очистки. Известными методами синтезировались углеводороды: 1,1-дифенилэтан (1-3), 1,1-дифенилпропан (4), 1,1-дифенил-*n*-бутан (5) и алкилпроизводные 1,1-дифенилэтана (метил, этил, изопропил и трет.-бутил) (5). 9-Метилфлуорен готовился магниорганическим синтезом из флуоренона и йодистого метила с последующим восстановлением карбинола. Галоидопроизводные изопропилбензола получались следующими методами. Парахлоризопропилбензол — из хлорбензола и бромистого изопропила с катализатором безводным хлористым алюминием. Парабромизопропилбензол — непосредственным бромированием изопропилбензола (6). Парайодизопропилбензол из паранитроизопропилбензола через соответствующее диазосоединение (7).

Галоидопроизводные 1,1-дифенилэтана были получены конденсацией стирола с соответствующими галоидобензолами по методу, который раз-

работан в лаборатории для 1,1-дифенилэтана (<sup>2,3</sup>). Однако выходы галоидо производных 1,1-дифенилэтана оказались несколько меньше (50—55%), чем выход углеводов.

Перечисленные вещества надлежащим образом очищались, как это необходимо для процесса автоокисления.

Исследования по автоокислению нами проводились в щелочной среде в оптимальных условиях, разработанных в нашей лаборатории для 1,1-дифенилэтана (<sup>2,3</sup>), а именно: к окисляемому веществу добавлялся 5% раствор едкого натра из расчета 0,05% чистого едкого натра и 1% воды на вес взятого продукта. Для избежания индукционного периода добавлялась также гидроперекись окисляемого вещества в чистом виде или в виде концентрата в количестве 0,5% от веса образца. Опыты велись в малых реакторах объемом 50 мл из обычного химического стекла; воздух вводился с

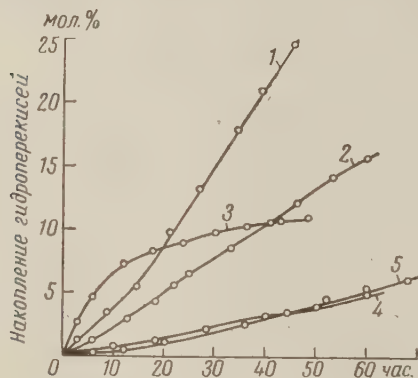


Рис. 1. Скорость образования гидроперекисей при автоокислении: 1—изопропилбензола, 2 — 1,1-дифенилэтана, 3 — 9-метилфлуорена, 4 — 1,1-дифенилпропана, 5 — 1,1-дифенил-*n*-бутана

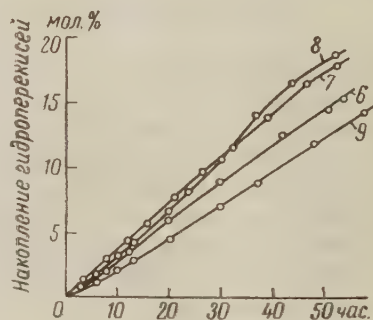


Рис. 2. Скорость образования гидроперекисей при автоокислении: 6 — 1-фенил-1-*n*-толилэтана, 7 — 1-фенил-1-*n*-этилфенилэтана, 8 — 1-фенил-1-*n*-изопропилфенилэтана, 9 — 1-фенил-1-*n*-трет.-бутилфенилэтана

помощью капиллярной трубки (погруженной в окисляемое вещество) со скоростью 25—30 мл в минуту. Для опыта брались образцы по 30 г. Скорость автоокисления определялась йодометрическим методом по количеству образовавшейся гидроперекиси. Опыты проводились при 80, 90 и 100°.

Из результатов, приведенных на рис. 1 для 90° (кривые 1, 2 и 3), видно, что изопропилбензол окисляется быстрее 1,1-дифенилэтана, но изомерный последнему 9-метилфлуорен в начальной стадии окисляется с большей скоростью, чем оба предыдущие углеводорода. Следовательно, накопление фенильных остатков у третичного С-атома замедляет автоокисление, что на первый взгляд кажется неясным.

Известно (<sup>8</sup>), что фенильные радикалы оказывают положительное влияние на процесс автоокисления, особенно у моноарильных углеводородов. Очевидно, когда у третичного С-атома находятся два фенильных радикала, то, по нашим представлениям, замедление автоокисления 1,1-дифенилэтана происходит по причине возникновения пространственных затруднений в свободнорадикальном процессе автоокисления. По современным представлениям об этом процессе большого объема перекисный радикал  $(C_6H_5)_2C\dot{N}H_2COO\cdot$  должен взаимодействовать с водородом третичного С-атома исходного углеводорода  $(C_6H_5)_2C\dot{N}H_2C-H$ , где водород также значительно экранирован фенильными остатками. Подтверждением этих соображений могут служить известные данные (<sup>9,10</sup>), показывающие, что при автоокислении трифенилметана не образуется его гидроперекись, а только перекись трифенилметила. В свете высказанного предположения о роли пространственных затруднений кажутся понятными данные по ускорению автоокисления 9-метилфлуорена, у которого, благодаря связыванию фенильных

радикалов и ориентации их в одной плоскости, стерические препятствия ослабляются, но сохраняется положительное влияние фенильных остатков на автоокислительный процесс. Спецификой 9-метилфлуорена является только то, что в процессе автоокисления глубина превращения его в гидроперекись остается невысокой, вследствие малой термической устойчивости самой гидроперекиси, которая нами получена в чистом кристаллическом виде и в настоящий момент подробно изучается.

Результаты, приведенные на рис. 1 (кривые 4, 5), показывают, что 1,1-дифенилпропан и 1,1-дифенил-*n*-бутан окисляются до соответствующих

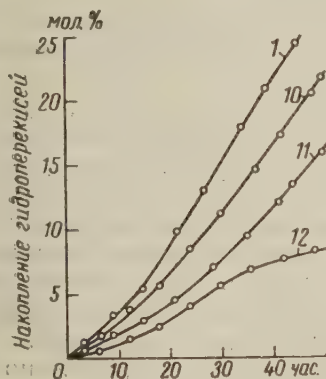


Рис. 3. Скорость образования гидроперекисей при автоокислении: 1 — изопропилбензола, 10 — *n*-хлоризопробензола, 11 — *n*-бромизопробензола, 12 — *n*-йодизопробензола

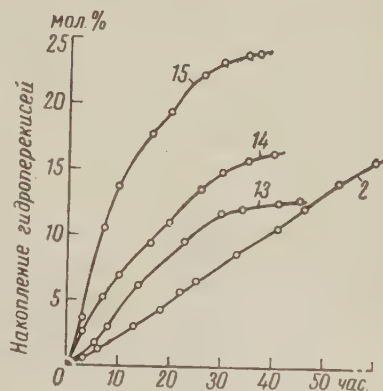


Рис. 4. Скорость образования гидроперекисей при автоокислении: 2 — 1,1-дифенилэтана, 13 — 1-фенил-1-*n*-хлорфенилэтана, 14 — 1-фенил-1-*n*-бромфенилэтана, 15 — 1-фенил-1-*n*-йодфенилэтана

гидроперекисей еще медленней 1,1-дифенилэтана. Замедление автоокисления этих углеводородов мы объясняем также возрастанием пространственных затруднений у третичного С-атома вследствие удлинения алифатической цепи.

На рис. 2 приведены данные по автоокислению параалкилпроизводных 1,1-дифенилэтана при 90°, из которых видно, что 1-фенил-1-*n*-толилэтан и 1-фенил-1-*n*-трет.-бутилфенилэтан (кривые 6, 9) окисляются с такой же скоростью, как и 1,1-дифенилэтан. Однако несколько быстрее окисляются 1-фенил-1-*n*-этилфенилэтан и 1-фенил-1-*n*-изопропилфенилэтан (кривые 7, 8), что, очевидно, связано с частичным окислением по месту данных алкилов до соответствующих гидроперекисей, как показано в работе К. С. Григорьевой<sup>(11)</sup>. Таким образом, эти данные показывают, что радикалы, находящиеся в одном из бензольных ядер 1,1-дифенилэтана в пароположении, не оказывают существенного влияния на скорость автоокисления. Эти наблюдения в сопоставлении с предыдущими подтверждают, что структурные факторы (наличие алкильных и арильных радикалов) оказывают особенно сильное влияние, когда они изменяются у третичного С-атома, у которого, по известному положению<sup>(12)</sup>, протекает автоокислительный процесс. Причем, по нашим представлениям, влияние этих структурных факторов обуславливается стерическими препятствиями.

На рис. 3 приведены данные по автоокислению парагалогидопроизводных изопропилбензола при 90°, из которых видно, что галоиды оказывают отрицательное влияние на автоокислительный процесс и по своему замедляющему действию располагаются в ряд:  $\text{Cl} < \text{Br} < \text{I}$ . Между тем, из данных, приведенных на рис. 4, видно, что галоиды в пароположении в одном из бензольных ядер 1,1-дифенилэтана оказывают положительное влияние на процесс автоокисления, т. е. парагалогидопроизводные 1,1-дифенилэтана окисляются быстрее до соответствующей гидроперекиси, причем по своему

ускоряющему влиянию галоиды располагаются в обратном порядке  $J > Br > Cl$ .

Наблюдаемое различие во влиянии галоидов в производных моноарильных (изопропилбензола) и диарильных (1,1-дифенилэтана) углеводородов на процесс автоокисления можно объяснить двойственным характером галоидов при участии их, с одной стороны, в электронных смещениях и, с другой, в эффектах сопряжения. В нашем случае порядок замедляющего влияния галоидов в изопропилбензоле, очевидно, объясняется понижением активности свободных радикалов и подвижности водорода по месту третичного С-атома вследствие ослабления поляризующего влияния галоидов в порядке  $Cl > Br > J$ . Аналогичный порядок замедляющего влияния галоидов, как известно, наблюдается и при полимеризации галоидовинилов и парагалоидостирола.

Активирующее влияние галоидов в галоидопроизводных 1,1-дифенилэтана, вероятно, можно объяснить поляризуемостью галоидов и участием их в сопряжении двойных связей. В нашем случае при наличии двух бензольных ядер имеет место сопряжение ненасыщенных связей ядра через третичный С-атом, причем галоиды в такой системе оказывают положительное влияние в таком порядке, что чем выше поляризуемость галоида, тем больше его положительное влияние на автоокисление. Аналогичная закономерность наблюдается при полимеризации 2-галоидозамещенных бутадиена-1,3, в которых имеется сопряженная система двойных связей.

Кроме изложенных выше результатов нами получены данные по автоокислению всех перечисленных соединений при 80 и 100° и в настоящий момент производится их аналитическая обработка.

Львовский  
политехнический институт

Поступило  
13 XII 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Т. И. Юрженко, Д. К. Толопко, В. А. Пучин, ДАН, **74**, 85 (1950).  
<sup>2</sup> Т. И. Юрженко, В. А. Пучин, Авторск. свид., 110207, 1957. <sup>3</sup> Т. И. Юрженко, В. А. Пучин, Научн. зап. Львовск. политехнич. инст., в. 62, 333 (1957).  
<sup>4</sup> Д. К. Толопко, Т. И. Юрженко, ДАН, **94**, 707 (1954). <sup>5</sup> Т. И. Юрженко, К. С. Григорьев и др., Сборн. Окисление углеводородов в жидкой фазе. Изд. АН СССР, 1959, стр. 227. <sup>6</sup> О. Jacobsen, Ber., **12**, 430 (1879). <sup>7</sup> E. Louis, Ber., **16**, 114 (1883). <sup>8</sup> J. L. Bolland, Trans. Farad. Soc., **46**, 358 (1950). <sup>9</sup> Т. И. Юрженко, Докт. диссертация, Казань, 1952. <sup>10</sup> Н. Носк, Ф. Дерке, Г. Кнауел, Ber., **83**, 238 (1950). <sup>11</sup> К. С. Григорьева, Канд. диссертация, Львов, 1955.  
<sup>12</sup> К. И. Иванов, Промежуточные продукты и промежуточные реакции автоокисления углеводородов, М.—Л., 1949.

Н. Н. БАХМАН

**РОЛЬ КОНВЕКТИВНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ  
ПРИ ГОРЕНИИ КОНДЕНСИРОВАННЫХ СМЕСЕЙ**

(Представлено академиком В. Н. Кондратьевым 2 XII 1960)

При горении конденсированных смесей, по крайней мере в том важном частном случае, когда смешению основной части компонентов предшествует их газификация, при достаточно больших размерах частиц (несколько сот микрон и выше) наблюдается <sup>(1)</sup> резкое ослабление зависимости нормальной скорости горения  $u_n$  от размера частиц  $d$  \*. Это явление можно объяснить, если предположить, что при достаточно больших  $d$ , помимо молекулярной диффузии, существенную роль начинает играть конвективное перемешивание, благодаря чему коэффициенты массо- и теплообмена растут с увеличением  $d$ .

Особенностью рассматриваемой задачи является то, что здесь можно ожидать возникновения двух различных видов турбулентности. Первый из них связан с тем, что сама исходная конденсированная смесь с беспорядочным расположением и формой частиц представляет собой своего рода «замороженную» турбулентность, которая «оживает» при газификации компонентов. Речь идет, следовательно, об искусственно созданной турбулентности, подобной той, которая возникает при работе различных мешалок и т. п. Этот вид турбулентности не имеет прямой связи с параметрами (и, в частности, с величиной  $Re$ ) установившегося потока продуктов газификации и сгорания. Уровень искусственно созданной турбулентности наиболее высок вблизи поверхности конденсированной фазы (к-фазы), т. е. как раз в той зоне, которая обычно оказывает наибольшее влияние на скорость горения. Дальше по потоку искусственно созданная турбулентность затухает. Основной масштаб турбулентности в данном случае должен быть пропорционален  $d$ .

Кроме того, в потоке продуктов газификации и сгорания при достаточно больших  $Re$  будет возникать обычная турбулентность, основной масштаб которой пропорционален  $G$ , где  $G$  — диаметр горящего канала или, при горении с торца, — диаметр цилиндрического заряда. Если ограничиться случаем горения с торца, то этот вид турбулентности, по-видимому, не будет существенно влиять на скорость горения, так как уровень такой турбулентности может стать значительным лишь на достаточно большом расстоянии от поверхности к-фазы.

Остановимся теперь на физической картине перемешивания при наличии искусственно созданной турбулентности. Рассмотрим причины, которые могут приводить к взаимному внедрению объемов, заполненных продуктами газификации компонентов. К числу таких причин следует прежде всего отнести непараллельность потоков продуктов газификации компонентов, а также неравенство абсолютных величин скоростей потоков.

\* Будем рассматривать часто встречающийся случай, когда один из компонентов смеси пластичен (или имеет размер частиц много меньше, чем у второго компонента) и образует среду, в которой распределены твердые частицы второго компонента. Если последние имеют примерно одинаковый размер  $d$ , то прослойки пластичного компонента также пропорциональны  $d$ .

Опыт показывает, что, по крайней мере при не слишком малых  $d$ , поверхность конденсированной фазы, обращенная к пламени, не является плоской и вдоль границ контакта компонентов образуются клинообразные выемки (рис. 1), которые растут с увеличением  $d$ . В непосредственной близости от поверхности к-фазы продукты газификации движутся перпендикулярно к ней ввиду отсутствия на поверхности каких-либо тангенциальных сил. Поэтому направление скорости газа на поверхности  $v$  меняется от точки к

точке, и вблизи поверхности происходит столкновение газовых потоков, что приводит к их перемешиванию.

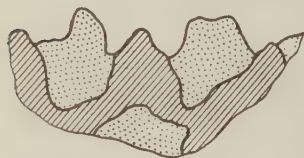


Рис. 1

Для абсолютных величин скоростей продуктов газификации из условия сохранения потока массы для каждого из компонентов можно написать

$$v_1 = \frac{\rho_1 u_1}{(\rho_1)_r}; \quad v_2 = \frac{\rho_2 u_2}{(\rho_2)_r}, \quad (1)$$

где  $\rho$ ,  $\rho_r$  — плотность конденсированного компонента и продуктов его газификации;  $u$  — скорость газификации (скорость исчезновения к-фазы).

Средние по времени значения  $\bar{u}_1$  и  $\bar{u}_2$  пропорциональны между собой и пропорциональны  $u_n$ , но текущие значения  $u_1$  и  $u_2$  в любой момент времени могут находиться в произвольном отношении. Поскольку  $\rho_1$  и  $\rho_2$ ;  $(\rho_1)_r$  и  $(\rho_2)_r$  также находятся в произвольном отношении, то, вообще говоря,  $v_1 \neq v_2$ .

Неравенство абсолютных величин скоростей продуктов газификации способствует их перемешиванию в тангенциальном (перпендикулярно  $u_n$ ) направлении и делает возможным конвективное перемешивание в аксиальном (параллельно  $u_n$ ) направлении. Действительно, рассмотрим момент времени, когда в данной точке поверхности компонент 2 сменяется компонентом 1. Поскольку, вообще говоря,  $v_{1a} \neq v_{2a}$ , по потоку должна пойти либо элементарная ударная волна (при  $v_{1a} > v_{2a}$ ), либо элементарная волна разрежения (при  $v_{1a} < v_{2a}$ ), которые, отражаясь от неоднородностей плотности, существующих в потоке, и от поверхности к-фазы, породят постепенно затухающие вторичные, третичные и т. д. волны. В результате, например, при  $v_{1a} > v_{2a}$  поток газа 1 будет внедряться в объем газа 2, причем граница между ними будет размываться пульсациями давления и скорости газа, возникающими при прохождении элементарных волн.

Существенно, однако, подчеркнуть, что перемешивание газа в аксиальном направлении играет незначительную роль по сравнению с перемешиванием в тангенциальном направлении, так как при газификации кубика твердого компонента мы получим прямоугольный объем газа, у которого размеры основания не изменились, в то время как высота (а вместе с ней и путь смещения в аксиальном направлении) увеличилась в  $\rho/\rho_r$  раз (т. е. в обычных условиях на один-три порядка).

Для рассматриваемой искусственно созданной турбулентности мы полагаем одним параметром с размерностью длины ( $d$ ) и одним параметром с размерностью скорости ( $v_1 - v_2$ ), из которых можно составить комбинацию, имеющую размерность коэффициента турбулентного обмена ( $\text{см}^2/\text{сек}$ ):

$$D_{\text{турб}} \sim d(v_1 - v_2); \quad (2)$$

при этом для перемешивания в тангенциальном направлении следует брать  $(v_{1t} - v_{2t})$ , а для перемешивания в аксиальном направлении  $(v_{1a} - v_{2a})$ .

Подставляя (1) в (2) и учитывая  $\bar{u}_1 \sim \bar{u}_2 \sim u_n$ , получим

$$D_{\text{турб}} \sim du_n \frac{\rho}{\rho_r} \sim \frac{du_n}{\rho}. \quad (3)$$

Учетом теперь, что коэффициент молекулярной диффузии

$$D_{\text{молек}} \sim \frac{1}{\rho} \quad (4)$$

не зависит от  $d$ , а также что обычно  $u_n \sim p^{0,5 \pm 0,7}$ . Отсюда следует, что роль конвективного перемешивания возрастает по мере увеличения  $d$  и  $p$ . Она должна возрастать также и по мере искривления поверхности к-фазы, поскольку при этом увеличивается угол столкновения струй и поскольку путь смешения в тангенциальном направлении много меньше, чем в аксиальном.

Формула (3), разумеется, еще не дает возможности оценить для данной системы значение  $d$ , начиная с которого конвективное перемешивание становится сравнимым с молекулярным, так как отсутствуют какие-либо соображения о величине численного коэффициента пропорциональности в правой части (3). С целью качественной проверки изложенных соображений роли конвективного перемешивания нами совместно с Ю. В. Фроловым были поставлены опыты, в которых с помощью киноаппарата с набором ветофильтров определялась высота  $h$  ядра факела цилиндрических зарядов ( $G = 1$  см) смеси  $\text{KClO}_4 +$  битум с размером частиц  $\text{KClO}_4$   $d \simeq 10$ ;  $\simeq 180$  и  $\simeq 1700$   $\mu$ . Горение факела происходило внутри большого сосуда, заполненного азотом при 1 ата и  $20^\circ$ . Было найдено, что высота ядра факела не только не возрастала, но, напротив, несколько убывала при перебеде от  $d \simeq 10$   $\mu$  к  $d \simeq 1700$   $\mu$ , что говорит в пользу возрастания коэффициента массообмена с увеличением  $d$ .

Была также определена зависимость  $h(d)$  для случая горения отдельной «частицы». С этой целью порошкообразный  $\text{KClO}_4$  запрессовывался в толстые цилиндрические оболочки из плексигласа с различным внутренним диаметром (от 0,4 до 1,4 см). Отметим, что в данном случае следует считать  $G = d$ . Из соображений размерности следует

$$h \sim \frac{v d^2}{D} \sim \frac{u d^2}{\rho_r D}, \quad (5)$$

причем для рассматриваемой системы  $u$  почти не зависит от  $d$  <sup>(2)</sup>. Поэтому для молекулярного смешения должно выполняться  $h \sim d^2$ . Напротив, если смешение турбулентно ( $D_{\text{турб}} \sim d$ ), то  $h \sim d$ . В проведенных опытах было найдено  $h \sim d$ , что также свидетельствует о значительной роли конвективного перемешивания.

Выражаю благодарность А. С. Соколику, О. И. Лейпунскому и Б. В. Ножкилову за обсуждение работы и ценные замечания.

Институт химической физики  
Академии наук СССР

Поступило  
3 XI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Н. Н. Бахман, А. Ф. Белаяев, ДАН, 133, № 4, 866 (1960). <sup>2</sup> Н. Н. Бахман, ДАН, 129, № 5, 1079 (1959).

Н. К. ГАЛКИНА, Р. Н. РУБИНШТЕЙН и М. М. СЕНЯВИН

# СТАТИКА ОБМЕНА СМЕСИ ИОНОВ

(Представлено академиком А. П. Виноградовым 28 XI 1960)

Как известно, основная цель применения обычных ионообменных процессов и ионообменной хроматографии состоит в поглощении и разделении смесей; несмотря на это до настоящего времени изучается статика обмена ионов порознь. При этом предполагается независимость обмена каждой

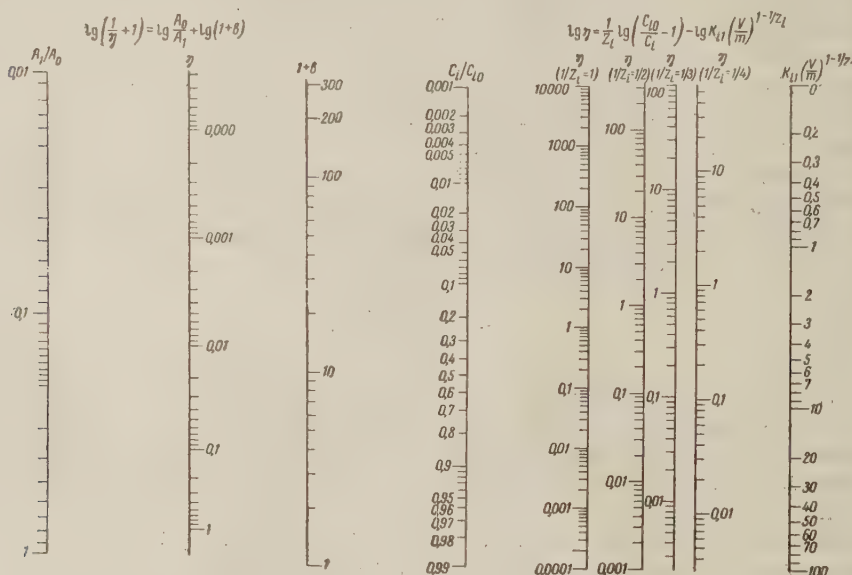


Рис. 1. Номограммы для расчета равновесных концентраций ионов при обмене в многокомпонентных системах

ионы (1<sup>-7</sup>). Степень такого приближения для растворов различной концентрации недостаточно изучена, во многом вследствие необходимости громоздких вычислений.

В задачу настоящей работы входило отыскание простого способа расчета равновесных соотношений в многокомпонентной системе с известными исходными концентрациями по заданным величинам констант обмена и сопоставление расчетных данных с экспериментальными.

Расчет сводился к решению системы уравнений, куда входят уравнения материального баланса и изотермы обмена для каждого иона при предположении, что коэффициенты активности ионов в растворе и в смоле равны единице:

$$\frac{A_i^{1/z_i}}{A_j^{1/z_j}} = K_{ij} \frac{C_i^{1/z_i}}{C_j^{1/z_j}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n; \quad (1)$$

$$m(A_i - A_{0i}) = V(C_{0i} - C_i); \quad (2)$$

$$A_0 = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n A_{0i}; \quad (3)$$

$$C_0 = \sum_{i=1}^n C_i = \sum_{i=1}^n C_{0i}; \quad (4)$$

$A_i$ ,  $A_j$  — сорбированные количества  $i$ -го и  $j$ -го ионов на единицу массы ионита;  $C_i$ ,  $C_j$  — равновесные концентрации  $i$ -го и  $j$ -го ионов в растворе;  $A_{0i}$ ,  $A_{0j}$  — начальные количества  $i$ -го и  $j$ -го ионов на единицу массы ионита;  $C_{0i}$ ,  $C_{0j}$  — начальные концентрации  $i$ -го и  $j$ -го ионов в растворе;  $A_0$  — статическая обменная емкость ионита;  $V$  — объем раствора;  $m$  — масса ионита;  $z_i$ ,  $z_j$  — заряды ионов.

Поскольку в процессах поглощения и разделения смесей элементов обычно используют ионит в форме однозарядного иона, ион, в форме которого находится исходный ионит, отмечен индексом 1,  $A_{01} = A_0$ ;  $A_{03} = A_{03} = \dots = A_{04} = 0$  и положено  $z = 1$ .

Решение системы уравнений (1), (2), (3) и (4) находится следующим приемом. По уравнению

$$\left( \frac{C_{0i}}{C_i} - 1 \right)^{1/z_i} = K_{i1} \left( \frac{V}{m} \right)^{1-1/z_i} \frac{1}{\frac{A_0}{A_1} (1+b) - 1} \quad (5)$$

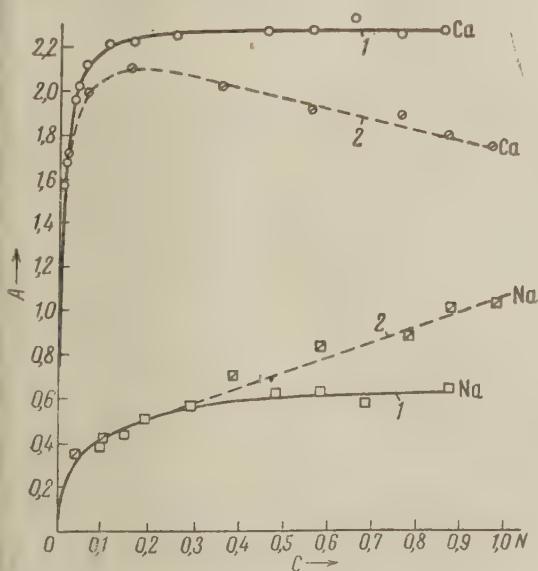


Рис. 3. Изотермы обмена натрия и кальция на водород при обмене в трехкомпонентной системе в присутствии 0,1 N соляной кислоты, 1 — экспериментальные данные, 2 — данные, рассчитанные по номограммам

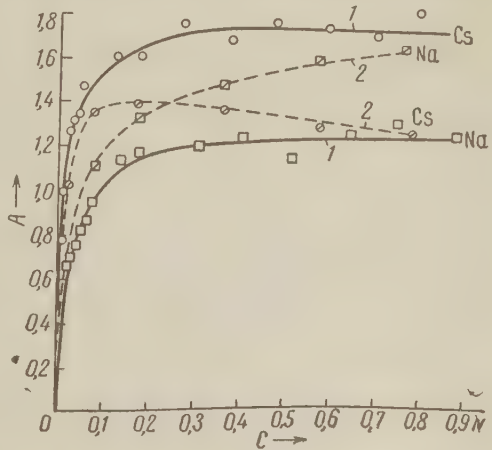


Рис. 2. Изотермы обмена натрия и цезия на водород при обмене в трехкомпонентной системе, 1 — экспериментальные данные, 2 — данные, рассчитанные по номограммам

(где  $b = \frac{V}{m} \frac{C_{01}}{A_0}$ ), которое является следствием уравнений (1) — (4), рассчитывается совокупность значений всех  $C_i$  для произвольной наперед заданной величины  $A_1$ . Далее по найденным  $C_i$  рассчитывается величина

$$A_1^1 = A_0 - \frac{V}{m} \left( \sum_{i=2}^n C_{0i} - \sum_{i=2}^n C_i \right). \quad (6)$$

Затем, строя графически зависимость  $A_1^1$  от  $A_1$ , находим решение системы уравнений в точке, для которой  $A_1 = A_1^1$ . Расчет по уравнению (6) облегчается при использовании номограмм (рис. 1).

Нами был изучен обмен в трехкомпонентной системе на катионите в водородной

форме. Необходимые для расчета равновесных соотношений в смеси величины индивидуальных констант обмена ионов определялись экспериментально в статических условиях и рассчитывались по уравнению (1).

Экспериментальные равновесные соотношения были изучены на примере систем  $\text{NaCl}-\text{CsCl}-\text{RH}$  и  $\text{NaCl}-\text{CaCl}_2-\text{HCl}-\text{RH}$  на катионите КУ-2 в статических условиях при концентрации солей до 1 *N* и эквивалентном соотношении металлов 1 : 1. Равновесные концентрации натрия и цезия определялись радиометрически, равновесные концентрации Са — комплексонометрическим титрованием трилоном Б (в смоле — после десорбции раствором  $\text{NaCl}$ ). Для обмена в концентрированных растворах ( $> 0,2$  *N*), где самой малой величиной является концентрация водорода в катионите, последняя определялась непосредственно путем смывания водорода с катионита 2*N* раствором  $\text{NaCl}$  и титрования его щелочью.

Полученные экспериментальные данные по обмену в трехкомпонентных системах и сопоставление их с расчетом, основанным на предположении о независимости обмена ионов, представлены на рис. 2 и 3. Наглядно видно полное соответствие экспериментальных и рассчитанных данных до концентрации равновесного раствора в среднем 0,05 *N* и закономерное расхождение при более высоких концентрациях раствора, которое, по-видимому, не может быть объяснено только ходом коэффициентов активности веществ.

Институт геохимии и аналитической химии  
им. В. И. Вернадского  
Академии наук СССР

Поступило  
19 XI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Б. П. Никольский, В. И. Парамонова, Усп. хим., 8, № 10, 1535 (1939). <sup>2</sup> А. М. Трофимов, Сборн. Хроматография, Изд. ЛГУ, 1956, стр. 15. <sup>3</sup> Т. Ф. Антипова-Каратаева, И. Н. Антипов-Каратаев, Колл. журн., 5, 419 (1939). <sup>4</sup> J. Drahoff, L. Lapidus, Industr. and Eng. Chem., 49, № 8, 1297 (1957). <sup>5</sup> G. Jangg, Österr. Chem. Ztg., 59, № 23—24, 331 (1958). <sup>6</sup> К. М. Салдадзе, А. Б. Пашков, В. С. Титов, Ионообменные высокомолекулярные соединения, М., 1960, стр. 38. <sup>7</sup> А. Т. Давыдов, И. Я. Левицкий, Тр. Н.-и. инст. химии Харьковск. гос. унив., 10, 221 (1953); 12, 309 (1954); 12, 316 (1954).

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

М. Г. ГОНИКБЕРГ

О ПРИМЕНЕНИИ ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ  
КОЛЛЕКТИВНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ПРОЦЕССАХ  
ПОЛИМЕРИЗАЦИИ

(Представлено академиком Б. А. Казанским 6 XII 1960)

В настоящее время общепризнано, что применение высокого давления оказывается весьма полезным для исследования переходного состояния химических реакций, в частности, данные о влиянии давления на скорость реакций в жидкой фазе позволяют в ряде случаев прийти к определенным выводам о строении переходного состояния (см., например, <sup>(1,2)</sup>), а также об участии в нем растворителя <sup>(3-6)</sup>. Сущность метода заключается в вычислении, по указанным выше кинетическим данным, величины изменения объема при образовании переходного состояния и в сопоставлении этой величины с ожидаемой на основании той или иной модели переходного состояния. Таким образом, оказывается возможным найти и сам объем переходного состояния. Легко видеть, что эта характеристика весьма важна при изучении коллективных взаимодействий. Речь при этом может идти о любых процессах, связанных с необходимостью преодоления известного энергетического барьера, и, в частности, о коллективных химических взаимодействиях.

Напишем уравнение, выражающее зависимость константы скорости процесса  $k$  от давления <sup>(7)</sup>:

$$\left(\frac{\partial \ln k}{\partial P}\right)_T = -\frac{\Delta v^\ddagger}{RT}, \quad (1)$$

Здесь  $\Delta v^\ddagger$  — изменение объема при образовании переходного состояния из исходных веществ. Если в переходном состоянии участвуют  $n$  частиц, то величина  $\Delta v^\ddagger$  будет, грубо говоря, в  $(n - 1)$  раз больше, чем при взаимодействии двух частиц.

В качестве иллюстрации применения рассматриваемого метода приведем интересные данные Уэнторфа о полиморфном превращении алмаза в графит, доложенные на XVII международном конгрессе по чистой и прикладной химии в августе 1959 г. (см. также <sup>(8)</sup>). Уэнторф нашел, что процесс рафитизации алмаза при температурах 1700—2200° весьма сильно тормозится с повышением давления. Найденная им по кинетическим данным величина  $\Delta v^\ddagger$  составляет около 168 см<sup>3</sup> на 1 г-ат., т. е. в 50 раз больше объема, приходящегося на 1 г-ат. в кристалле. Отсюда автор сделал естественный вывод о том, что изученный им полиморфный переход осуществляется как коллективный акт с участием значительного числа атомов.

Рассмотренное выше полиморфное превращение алмаза в графит характеризуется увеличением объема при образовании переходного состояния. Обратный по знаку эффект наблюдается в реакциях полимеризации (см. <sup>(9)</sup>). Особенно большое сжатие при образовании переходного состояния должно происходить в таких реакциях полимеризации (при низких температурах или высоких давлениях), в которых можно предполагать наличие коллективного взаимодействия реагирующих частиц <sup>(10,11)</sup>. Подобные реакции должны поэтому претерпевать весьма значительное ускорение с повыше-

нием давления. Это можно проиллюстрировать следующим произвольно взятым примером. Пусть уменьшение объема при образовании переходного состояния с участием двух молекул мономера (или радикала с молекулой) составляет  $10 \text{ см}^3$  на 1 моль, а число участвующих в переходном состоянии частиц  $n$  равно десяти. Тогда повышение давления на 1000 атм. приведет, в соответствии с уравнением (1), к увеличению константы скорости реакции в 43 раза.

Из изложенного следует, что исследование влияния давления на скорость полимеризации в жидкой и твердой фазах может выявить случаи коллективного взаимодействия реагирующих частиц и позволит оценить число «участников» этого взаимодействия.

Большой интерес представляет также изучение влияния температуры на зависимость константы скорости от давления. На основании сопоставления уравнения Аррениуса с уравнениями теории переходного состояния можно написать следующие равенства\*:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_T = \left(\frac{\partial \Delta H^\ddagger}{\partial P}\right)_T; \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial \ln A}{\partial P}\right)_T = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \Delta S^\ddagger}{\partial P}\right)_T. \quad (3)$$

Воспользуемся теперь известными термодинамическими уравнениями, характеризующими зависимость теплосодержания и энтропии от давления, и подставим их в (2) и (3):

$$\left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_T^\ddagger = \Delta v^\ddagger - T \left(\frac{\partial \Delta v^\ddagger}{\partial T}\right)_P; \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial \ln A}{\partial P}\right)_T = - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \Delta v^\ddagger}{\partial T}\right)_P. \quad (5)$$

По уже цитированным данным Уэнторфа, энергия активации процесса графитизации алмаза возрастает с повышением давления от 0 (вакуум) до 20 000 атм. соответственно с 175 до 255 ккал/г-ат. Подставляя эти данные в уравнение (4), находим, что правая часть этого уравнения равна приблизительно  $165 \text{ см}^3/\text{г-ат}$ . Из сопоставления этой цифры с величиной  $\Delta v^\ddagger$ , равной около  $168 \text{ см}^3/\text{г-ат}$ . (см. выше), мы можем заключить, что изменение  $\Delta v^\ddagger$  с температурой близко к нулю. Это означает, что в рассматриваемом процессе изменение температуры в изученных пределах (1700—2200°) не влияет заметным образом на число атомов, участвующих в коллективном акте полиморфного превращения. Выяснение этого вопроса для коллективных химических взаимодействий будет способствовать проникновению в физическую сущность и механизм этих процессов.

Институт органической химии им. Н. Д. Зелинского  
Академии наук СССР

Поступило  
1 XII 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> C. Walling, J. Peisach, J. Am. Chem. Soc., 80, 5819 (1958). <sup>2</sup> М. Г. Гоникберг, ЖФХ, 34, 225 (1960). <sup>3</sup> J. Buchanan, S. D. Hamann, Trans. Farad. Soc., 49, 1425 (1953). <sup>4</sup> М. Г. Гоникберг, В. М. Жулин, Austr. J. Chem., 11, 285 (1958). <sup>5</sup> М. Г. Гоникберг, Б. С. Эльянов, ДАН, 130, 545 (1960). <sup>6</sup> E. Whalley, Canad. J. Chem., 36, 228 (1958). <sup>7</sup> M. G. Evans, M. Polanyi, Trans. Farad. Soc., 31, 875 (1935). <sup>8</sup> H. P. Bovenkerk, F. P. Bundy et al., Nature, 184, 1094 (1959). <sup>9</sup> М. Г. Гоникберг, Химическое равновесие и скорость реакций при высоких давлениях, Изд. АН СССР, 1960. <sup>10</sup> Н. Н. Семенов, Сборн. Химия и технология полимеров, 1960, № 7—8, стр. 196. <sup>11</sup> М. Г. Гоникберг, В. М. Жулин, Б. С. Эльянов, ДАН, 132, 353 (1960).

\* При предположении о независимости трансмиссионного коэффициента от давления.

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

В. Ф. ИВАНОВ и З. А. ИОФА

ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕТИКИ ЭЛЕКТРОВССТАНОВЛЕНИЯ  
ЖЕЛЕЗА НА КАПЕЛЬНОМ РТУТНОМ ЭЛЕКТРОДЕ

(Представлено академиком А. Н. Фрумкиным 30 XI 1960)

Изучению восстановления двухвалентных ионов железа на ртутном капельном электроде (РКЭ) полярографическим методом посвящено большое число работ (<sup>1</sup>). Однако почти все они преследуют аналитические цели. Я. Гейровский (<sup>2</sup>) впервые указывает на высокое перенапряжение при восстановлении ионов железа на РКЭ. Он предполагает (<sup>3</sup>), что  $\text{Fe}^{2+}$  восстанавливаются обратимо, так как потенциал восстановления подчиняется уравнению  $\varphi = \text{const} + 0,029 \lg [\text{Fe}^{2+}]$ . Очень отрицательные значения потенциала объясняются им образованием метастабильной амальгамы, содержащей высокоактивное атомарное железо. Последним объяснено и отсутствие на анодной ветви осциллографической кривой задержки, связанной с растворением железа из амальгамы. На обратимость процесса указывается и в работе (<sup>4</sup>). Однако Кольтгоф и Лингейн (<sup>5</sup>) считают, что железо на РКЭ не образует амальгамы и восстановление происходит необратимо.

В настоящей работе исследовались степень необратимости этой реакции, влияние концентрации ионов железа и ионов водорода, а также влияние концентрации и природы фона на кинетику процесса.

Исследование проводилось на визуальной полярографической установке. Потенциал РКЭ измерялся компенсационным методом. Электродом сравнения служил 1N каломельный электрод. Особенностью применяемой ячейки являлось наличие вмонтированных на шлифах водородного и стеклянного электродов, позволявших контролировать pH раствора в любой момент опыта. Точность определения  $\text{pH} \pm 0,05$ . Температура опытов  $25 \pm 0,15^\circ$ . С целью разделения близко лежащих потенциалов полувольт разряда ионов железа и ионов водорода часть опытов была проведена на осциллографическом полярографе ЦЛА-01 системы Цфасмана. С помощью этого осциллографа были замерены потенциалы пиков  $\varphi_p$  дифференциальных полярограмм.

Исследование зависимости предельного тока  $I_d$  от концентрации ионов  $\text{Fe}^{2+}$  в пределах от  $10^{-4}$  до  $10^{-2}N$  показало, что в нейтральных и слабо кислых растворах (при  $\text{pH} > 4,5$ )  $I_d$  с достаточной точностью подчиняется уравнению Ильковича, если принять  $n = 2$ , а коэффициент диффузии  $0,76 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{сек}$  (рассчитан из данных электропроводности). Опытные данные приведены на рис. 1, 1. В области pH от 4,5 до 2,8 предельные токи по железу и водороду становятся соизмеримыми. Из рис. 1, 2, 3 видно, что в пределах pH от 7 до 2,8 предельный ток диффузии равен сумме токов по водороду и железу.

Исследование подтвердило выводы работ (<sup>3,5</sup>), что  $\varphi_{1/2}$  волны железа смещается в сторону более положительных потенциалов при увеличении концентрации ионов железа (см. рис. 1,4). По литературным данным (<sup>6</sup>) соответствующего изменения  $\varphi_{1/2}$  от концентрации Ni и Co обнаружено не было. Величина смещения  $\varphi_{1/2}$  в общем случае не постоянна и находится в сложной зависимости от значений концентраций ионов железа и ионов водорода в растворе.

На рис. 2, 1—3 приведены результаты определения влияния концентрации и природы фона на  $\varphi_{1/2}$  железа при  $\text{pH} > 4,5$ , когда присутствие ионов  $\text{H}^+$  не оказывает заметного влияния на волну железа. Там же нанесена кривая 4 зависимости коэффициента  $\alpha = 0,029/b^*$  от концентрации фона (KCl). Как видно из кривой 4 рис. 2, значение  $\alpha$  уменьшается с увеличением концентрации фона, что указывает на необратимость процесса.

Это уменьшение значений  $\alpha$ , а так же смещение  $\varphi_{1/2}$  вправо вызывается очевидно, уменьшением отрицательных значений  $\psi_1$ -потенциала с увеличе-

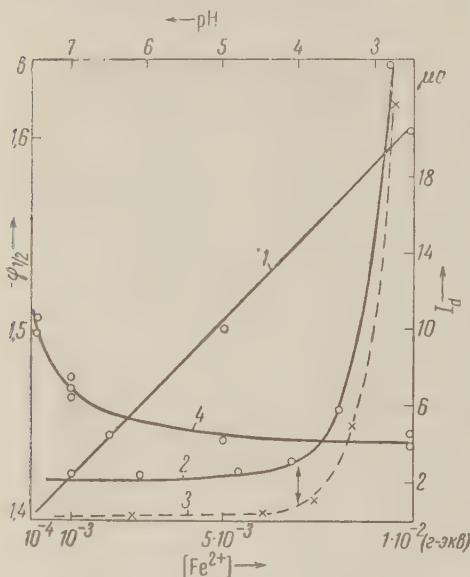


Рис. 1. Кривые зависимости: 1 —  $I_d$  от  $[\text{Fe}^{2+}]$ , фон 2 N KCl, pH 5,5; 2 —  $I_d$  от pH, фон 1 N KCl,  $[\text{Fe}^{2+}] = 10^{-3}$  N; 3 —  $I_d$  от pH, фон 1 N KCl,  $[\text{Fe}^{2+}] = 0$ ; 4 —  $\varphi_{1/2}$  от  $[\text{Fe}^{2+}]$ , фон 2 N KCl, pH 5,5

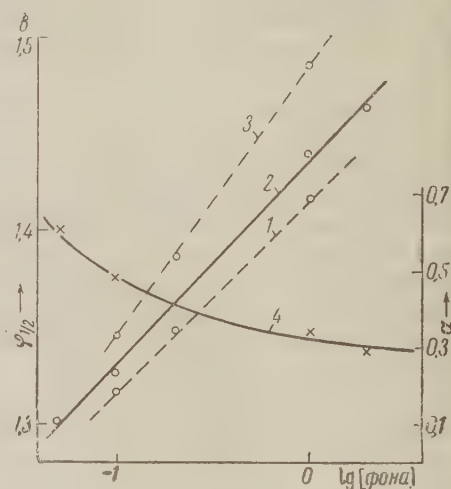


Рис. 2. Кривые зависимости  $\varphi_{1/2}$  от концентрации фона: 1 — KCl, 2 — KCl; 3 —  $\text{K}_2\text{SO}_4$ ,  $[\text{Fe}^{2+}] = 10^{-3}$  N, pH 5,5; 4 — кривая зависимости  $\alpha = 0,029/b^*$  от  $[\text{KCl}]$ ,  $[\text{Fe}^{2+}] = 10^{-3}$  N, pH 5,5

нием концентрации фона. Особенно заметен этот эффект в случае использования в качестве фона сульфатов.

Противоположное влияние оказывают концентрированные растворы  $\text{CaCl}_2$ . На фоне 5M раствора  $\text{CaCl}_2$  наблюдается сдвиг  $\varphi_{1/2}$  в положительную сторону до 300 мВ (см. рис. 4). Если вместо  $\text{CaCl}_2$  в качестве фона взять концентрированный раствор  $\text{Ca}(\text{ClO}_4)_2$  (уд. вес.  $\sim 1,4$ ), то значение  $\varphi_{1/2}$  остается примерно таким же, как и в растворах KCl.

Результаты наших исследований о влиянии pH на  $\varphi_{1/2}$  электровосстановления  $\text{Fe}^{2+}$  представлены на рис. 3А. Как видно из кривых 4 и 6, потенциалы полуволн совместного разряда ионов железа и ионов водорода в пределах pH от 4,5 до 2,8 лежат значительно положительнее  $\varphi_{1/2}$  разряда ионов водорода (см. кривые 1, 3, 5), но отрицательнее значений  $\varphi_{1/2}$  разряда ионов железа при  $\text{pH} > 5$  (см. кривую 2). С уменьшением pH совместной волны, как видно из кривых 2, 4, 6, 7, приближается к значению  $\varphi_{1/2}$  водородной волны ( $\varphi_{1/2} = -1,620$  в).

Если из токов общей волны вычесть токи водородной волны при разных значениях потенциала, то по разности токов можно построить волну разряда железа (для данного значения pH). Потенциалы полуволн  $\varphi_{1/2}$  полученных таким способом кривых разряда ионов  $\text{Fe}^{2+}$  в кислых растворах

\*  $b$  из уравнения  $\varphi = \varphi_{1/2} + b \lg \frac{i\alpha - i}{i}$ .

оказываются более отрицательными, чем в нейтральных средах (см. кривые 8 и 9 рис. 3Б).

Правомерность такого построения кривых и указанного вывода была подтверждена данными дифференциальной полярографии:

Фон	1N KCl				10N CaCl <sub>2</sub>				10N Ca(ClO <sub>4</sub> ) <sub>2</sub>	10N LiCl
pH	6,5;	4,5;	3,5;	3,0;	5,0*;	3,5*;	5,0;	3,5	~ 4,5	5,8
$\Phi_{1/2}$ , в	1,42;	1,45;	1,49;	1,55	—	—	1,13;	1,14	1,42**	1,27**
$\Phi_p$ , в	1,45;	1,50;	1,55;	—	1,33 *;	1,24 *;	1,27;	1,27	1,4	—

\* Данные работы (8).

\*\* Из полярографической волны.

Эти данные показали, что потенциал пика  $\Phi_p$  на дифференциальных кривых разряда ионов водорода не изменяется от присутствия в растворе ионов железа и практически не зависит от изменения pH. В то же время  $\Phi_p$  разряда

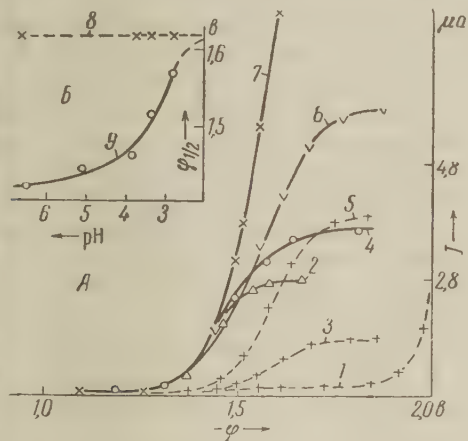


Рис. 3. А — кривые зависимости  $I - \Phi$ ,  $[Fe^{2+}] = 0$ , фон 1 N KCl: 1 — pH 6,6, 3 — pH 3,8, 5 — pH 3,3; кривые зависимости  $I$  от  $\Phi$ ,  $[Fe^{2+}] = 10^{-3}$  N, фон 1 N KCl: 2 — pH 6,6; 4 — pH 3,8; 6 — pH 3,3; 7 — pH 2,8. Б — зависимость  $\Phi_{1/2}$  от pH, фон 1 N KCl: 8 —  $[Fe^{2+}] = 0$ ; 9 —  $[Fe^{2+}] = 10^{-3}$  N.

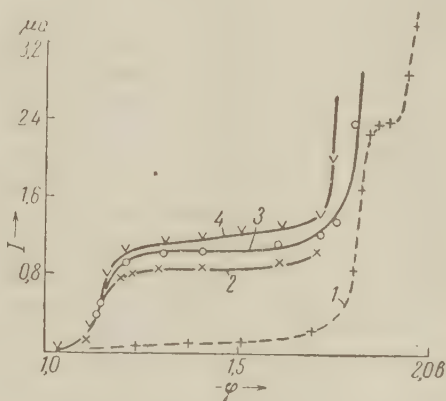
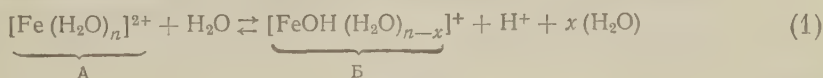


Рис. 4. Кривые  $I - \Phi$  на фоне 5 M CaCl<sub>2</sub>: 1 —  $[Fe^{2+}] = 0$ , pH 3,65; 2 —  $[Fe^{2+}] = 10^{-3}$  N, pH 4,9; 3 —  $[Fe^{2+}] = 10^{-3}$  N, pH 3,6; 4 —  $[Fe^{2+}] = 10^{-3}$  N, pH 2,9

ионов железа на этих же дифференциальных кривых с уменьшением pH смещается в сторону отрицательных потенциалов: при изменении pH с 6,5 до 3,5  $\Delta\Phi_p \approx 100$  мв. В очень кислых растворах (pH 2,2) пик волны разряда ионов железа сливается с пиком разряда ионов водорода. В общем случае величина смещения  $\Phi_{1/2}$  и  $\Phi_p$  зависит от соотношения концентраций ионов железа и ионов водорода; с увеличением концентрации ионов железа  $\Delta\Phi_{1/2}$  уменьшается.

По литературным данным возрастание поляризации с уменьшением pH наблюдалось при электроосаждении цинка, никеля, кобальта, лантана, индия и некоторых других металлов (7). Для процесса разряда ионов железа на РКЭ таких данных нет, за исключением работы (8), в которой отмечается обратный ход этой зависимости на фоне 5 M раствора CaCl<sub>2</sub>. Однако последнее не согласуется с результатами наших опытов, проведенных в аналогичных условиях (см. рис. 4).

Совокупность полученных нами экспериментальных данных может быть объяснена, если предположить следующий механизм процесса электровосстановления железа на РКЭ. В водном растворе за счет реакции:



образуются менее гидратированные оксокомплексы Б. В двойном слое в определенном соотношении концентраций находятся как ионы А, так и ионы Б. Если предположить, что разряд более гидратированных аквакомплексов А более затруднен, то скорость процесса должна определяться замедленностью стадии разряда менее гидратированных комплексов Б:



Таким образом, реакция (2) является стадией, определяющей скорость процесса. Расход ионов Б может пополняться за счет диффузии ионов А и быстрого перехода их в ионы Б по мере смещения равновесия  $\text{A} \rightleftharpoons \text{B}$  в околоэлектродном слое. Величина предельного тока определяется не ионами Б, а общей концентрацией ионов железа в объеме.

В соответствии с приведенным механизмом электродной реакции уменьшение рН раствора должно вызвать сдвиг равновесия объемной реакции (1) в сторону уменьшения концентрации ионов Б и тем самым вызвать рост поляризации. С другой стороны, казалось бы, что всякая мера, приводящая к уменьшению степени гидратации ионов железа, должна облегчить процесс их разряда и сделать его более обратимым. В сильно концентрированных растворах  $\text{CaCl}_2$  мы действительно наблюдали уменьшение поляризации этого процесса. Однако замена фона  $\text{CaCl}_2$  на концентрированный раствор  $\text{Ca}(\text{ClO}_4)_2$  показала, что ионы  $\text{Ca}^{2+}$  не играют решающей роли. Причина большого сдвига  $\varphi_{1/2}$  в сторону положительных значений в указанном случае связана, вероятно, не с дополнительной дегидратацией аквакомплексов а с заменой оксикомплексов на хлорокомплексы.

Выражаем благодарность акад. А. Н. Фрумкину за внимание и советы, оказанные при выполнении данной работы.

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

Поступило  
28 XI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> С. Г. Михлин, Зав. лаб., 5, 1167 (1936); Я. П. Гохштейн, Зав. лаб., 5, 28 (1936); А. М. Дымов, Г. Д. Кубышкина, Н. С. Полиэктова, Зав. лаб., 6, 147 (1937); Е. С. Бурксер, С. Г. Михлин, Укр. хим. журн., 2, 369 (1937); J. Lingane, J. Am. Chem. Soc., 68, 2448 (1946). <sup>2</sup> J. Heyrovsky, C. R., 179, 1267 (1924). <sup>3</sup> J. Heyrovsky, B. Souček, C. R., 183, 125 (1926); Я. Гейровский, Полярографический метод, М., 1937; J. Heyrovsky, R. Kalvoda, Oszillographische Polarographie mit Wechselstrom, Berlin, 1960. <sup>4</sup> А. А. Габович, Тр. Кишиневск. с.-х. инст. им. М. В. Фрунзе, 9, 143 (1956). <sup>5</sup> И. Кольтгоф, Д. Лингейн, Полярография, 1948. <sup>6</sup> Я. И. Турьян, ДАН, 113, 631 (1957). <sup>7</sup> С. И. Жданов, А. Н. Фрумкин, ЖФХ, 29, 1959 (1955); З. А. Соловьева, С. А. Абраров, ЖФХ, 30, 1572 (1956); R. Brdička, Chem. News, 142, 336 (1931). A. S. Wensen, G. Glockler, J. Am. Chem. Soc., 71, 1641 (1949). <sup>8</sup> G. Reynolds, H. Shalvosky, F. Weber, Anal. Chim. Acta, 9, 91 (1953).

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Н. М. ПОМЕРАНЦЕВ, В. А. ХРАМЧЕНКОВ, Л. В. СУМИН и А. В. ЗИМИН

СПЕКТРЫ ЯДЕРНОГО МАГНИТНОГО РЕЗОНАНСА

ОБЛУЧЕННЫХ ПЕРФТОРОКТАДИЕНА И ПЕРФТОРДОДЕКАДИЕНА

(Представлено академиком В. А. Қарғиным 17 XI 1960)

При исследовании радиационно-химических процессов, происходящих благодаря облучению органических систем, весьма ценные результаты дает использование методов и.-к. спектроскопии и ядерного магнитного резонанса (я. м. р.) (<sup>1</sup>). Однако расшифровка и.-к. спектров затруднена в особенности для сложных молекул вследствие перекрывания полос поглощения, характеризующих отдельные функциональные группы в молекуле. В я. м. р. спектрах линии, характеризующие эти группы, хорошо различимы, что делает более надежным решение вопроса о наличии отдельных функциональных групп.

Нами получены спектры магнитного резонанса ядер  $F^{19}$  для не облученных и облученных на  $Co^{60}$  (интегральная доза  $\sim 10^{22}$  эв  $\cdot$  г<sup>-1</sup>) перфтороктадиена и перфтордодекадиена. Запись спектров произведена при комнатной температуре с помощью установки, которая будет описана в отдельной статье. Химический сдвиг измерялся относительно линии  $F^{19}$  группы  $CF_3$  трифторуксусной кислоты. Величины химического сдвига  $\delta$ , отложенные на шкале рис. 1 и 2, определяются выражением  $\delta = \frac{H_{эт} - H_{обр}}{H_{эт}} \cdot 10^5$ , где  $H_{эт}$  — резонансное значение поля для эталона и  $H_{обр}$  — резонансное значение поля для фтора данной функциональной группы.

Опубликованные в литературе теоретические и экспериментальные данные по химическим сдвигам для фторуглеродных соединений позволяют однозначно произвести расшифровку приведенных выше спектров. Можно считать установленным, что для фторсодержащих соединений химический сдвиг ядер  $F^{19}$  в основном определяется видом химической связи. Для сферически симметричных ионов  $F^-$  парамагнитный член в выражении для химического сдвига отсутствует. Наличие ковалентной связи приводит к появлению этого члена и смещению линий поглощения в сторону слабых полей (<sup>2,3</sup>). Для фторуглеродных соединений, не содержащих других атомов, кроме углерода и фтора, установлено, что линии поглощения для ядер  $F^{19}$  групп  $CF$  расположены в относительно сильных полях. В более слабых полях расположены линии групп  $CF_2$ , а линии, обусловленные  $F^{19}$  групп  $CF_3$ , расположены в еще более слабых полях (<sup>4</sup>).

Исходя из приведенных выше соображений спектры необлученных перфтороктадиена и перфтордодекадиена расшифровываются следующим образом. Сильная полоса в районе  $\delta = 5,5$  предполагается состоящей из серии неразрешенных линий, принадлежащих ядрам  $F^{19}$  групп  $—CF_2—$  молекул  $CF_2 = CF — (CF_2)_4 — CF = CF_2$  и  $CF_2 = CF — (CF_2)_8 — CF = CF_2$ . Относительно слабая линия ( $\delta = 1,8$ ) предполагается обусловленной ядрами  $F^{19}$  концевых групп  $=CF_2$ . Линия, обусловленная  $CF$ , которая ожидается расположенной в более сильном поле, чем линия ядер  $F^{19}$  групп  $—CF_2—$ , не наблюдалась, по-видимому вследствие ее малой интенсивности. Приведенное выше отнесение линий спектра подтверждается соображениями, основанными на оценке интенсивности линий.

Спектры облученных перфтороктадиена и перфтордодекадиена отличаются от спектров необлученных соединений наличием линии, расположенной в относительно более слабых полях, чем линии необлученных образцов. Эта линия по своему положению, согласно сказанному выше, должна быть отнесена к группе  $\text{CF}_3$ , обнаруженной также методом и.-к. спектроскопии.

Некоторые изменения формы полосы, принадлежащей ядрам  $\text{F}^{19}$  группы  $-\text{CF}_2-$ , объясняются, вероятно, возникновением разветвленной структуры

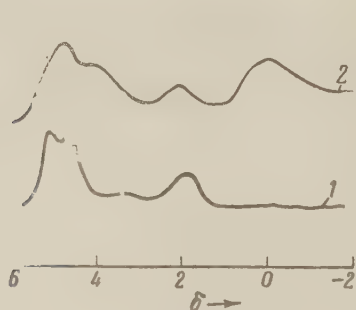


Рис. 1. Спектр магнитного резонанса ядер  $\text{F}^{19}$  для необлученного (1) и облученного (2) перфтороктадиена

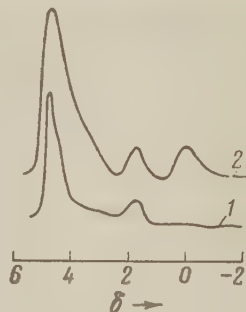


Рис. 2. Спектр магнитного резонанса ядер  $\text{F}^{19}$  для необлученного (1) и облученного (2) перфтордодекадиена

и могут быть интерпретированы при лучшем разрешении линий, составляющих эту полосу. Необходимо отметить, что ширина линий для облученных образцов больше, чем для необлученных. Это объясняется вязкостью облученных образцов и ставит предел возможному разрешению. Следует ожидать, что измерения при более высоких температурах дадут спектры с лучшим разрешением.

Физико-химический институт  
им. Л. Я. Карпова

Поступило  
10 XI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> J. A. Pople, W. G. Schneider, H. J. Bernstein, High-resolution Nuclear Magnetic Resonance, N. Y., 1959.
- <sup>2</sup> H. S. Gutowsky, C. J. Hoffman, J. Chem. Phys., 19, 1259 (1951).
- <sup>3</sup> A. Saika, W. P. Slichter, J. Chem. Phys., 22, 26 (1954).
- <sup>4</sup> N. Muller, P. C. Lauterber, G. F. Svatos, J. Am. Chem. Soc., 79, 1807 (1957).

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Г. Б. РАВИЧ и Ю. Н. БУРЦЕВ

ВЛИЯНИЕ ПОЛИМОРФИЗМА НА ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

(Представлено академиком И. В. Тананаевым 25 XI 1960)

Изменение теплопроводности в результате фазовых превращений в твердом состоянии, связанных с различными формами полиморфизма (обратимые, необратимые переходы модификаций), представляет значительный научный и прикладной интерес с точки зрения молекулярной физики. Первые наблюдения в этом плане, выполненные с неорганическими веществами, в частности с серой <sup>(1)</sup>, показали на наличие существенной разницы численного значения теплопроводности у различных полиморфных фаз. Был также установлен различный температурный ход теплопроводности у разных модификаций. Нам почти неизвестны работы по изучению теплопроводности при фазовых переходах в твердых органических веществах, а также при изменении агрегатного состояния этих веществ (плавление, кристаллизация). Это связано, по-видимому, с существенными методическими трудностями, которые встают при постановке подобных экспериментов.

Для выяснения влияния полиморфизма на теплопроводность мы использовали разработанный нами прибор, который позволял производить измерения с достаточной точностью (ошибка опыта не превышала 2%). В качестве объекта исследования был выбран *n*-дихлорбензол. Как известно из литературы, это вещество обладает явно выраженным полиморфизмом, и в частности обратимым переходом при  $\sim 32^\circ$ . Число фаз, по данным различных авторов, варьирует от двух до трех <sup>(2-5)</sup>.

Измерения теплопроводности *n*-C<sub>6</sub>H<sub>4</sub>Cl<sub>2</sub> проводились при стационарных условиях относительным методом на приборе типа двух коаксиальных цилиндров, который был сконструирован так, что позволял измерять теплопроводность вещества в твердом и жидком состоянии.

Прибор (рис. 1) был изготовлен из стекла и состоял из рабочего цилиндра (1) (внутренний диаметр 3—4 мм), переходящего вверх в воронку 2 для загрузки вещества. По оси рабочего цилиндра 1 с помощью тefлоновой втулки 3 центрировался четырехканальный стеклянный капилляр 4 (внешний диаметр 1,5—2,0 мм), внутри которого помещалась термopара медь — константан 5 (диаметр 0,10 мм) и нихромовый нагреватель 6 (диаметр 0,10 мм). Длина капилляра 4 была на 8—10 см меньше длины рабочего цилиндра 1, и, таким образом, воронка, образующаяся при кристаллизации вещества в цилиндре, на 2—5 см не доходила до верхнего торца капилляра. Рабочий цилиндр был заключен в две рубашки 7 и 8, в которые подавалась термостатируемая жидкость из термостата Вобзера. Температура жидкости в приборе измерялась с помощью термopары 9, заключенной в капилляр 10. Сверху прибор герметично закрывался сферическим колпаком 11, имеющим отвод 12, который через кран 13 подключался к вакуумному насосу.

Термopары 5 и 9 были соединены так, что можно было измерять как температуры на стенках капилляра 4 и рабочего цилиндра 1, так и разности этих температур. Э. д. с. термopар измерялась на потенциометре ППТН-1.



кривая теплопроводности не претерпевает никаких изломов. В зависимости от способов кристаллизации расплава, времени выдерживания при определенных температурах и т. д. получают различные модификации  $n\text{-C}_6\text{H}_4\text{Cl}_2$ , имеющие разную теплопроводность.

В твердом состоянии у  $n\text{-C}_6\text{H}_4\text{Cl}_2$  нами обнаружены две стабильные модификации: низкотемпературная  $\alpha$  (рис. 2, IV), обладающая низкой теплопроводностью ( $29\text{--}35 \cdot 10^{-5}$  кал/см·сек·град), и высокотемпературная  $\beta$  (рис. 2, III), обладающая более высокой теплопроводностью ( $37\text{--}40 \cdot 10^{-5}$  кал/см·сек·град). Энантиотропный переход между этими двумя модификациями  $\alpha \rightleftharpoons \beta$ , по нашим измерениям, соответствует  $\sim 32^\circ$ . Модификацию  $\alpha$  при быстром нагревании иногда удавалось перегреть до  $40^\circ$ , не вызывая перехода: модификацию  $\beta$  можно переохладить до  $30^\circ$ .

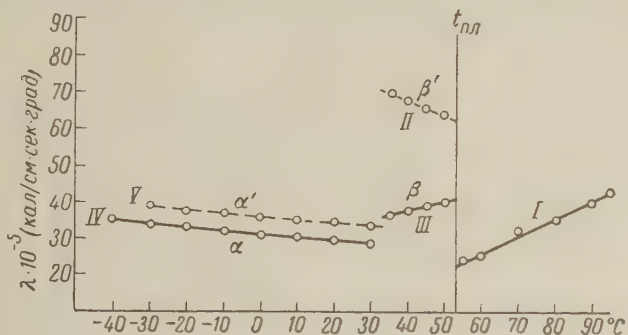


Рис. 2. Теплопроводность парадихлорбензола

Точно выявить температуру  $\alpha \rightleftharpoons \beta$  перехода можно только при длительном термостатировании.

Кроме стабильных модификаций у  $n\text{-C}_6\text{H}_4\text{Cl}_2$  мы обнаружили наличие метастабильных форм. При быстром охлаждении расплава образуется первая метастабильная модификация  $\beta'$  (рис. 2, II), существующая в интервале температур  $+32 \div +53^\circ$ , которая обладает теплопроводностью  $63\text{--}70 \cdot 10^{-5}$  кал/см·сек·град. Теплопроводность этой модификации удавалось проследить до  $+20^\circ$ .

В температурном интервале  $+32 \div +53^\circ$   $\beta'$ -модификация через 4–5 суток переходит в стабильную форму  $\beta$ . Этот переход осуществляется, по-видимому, через ряд метастабильных форм с кратким временем существования, так как иногда удается снять кривые теплопроводности, лежащие по своему значению между кривыми  $\beta'$ - и  $\beta$ -модификаций.

Переход от  $\beta$  к  $\alpha$  идет через метастабильную форму  $\alpha'$ , обладающую теплопроводностью  $35\text{--}39 \cdot 10^{-5}$  кал/см·сек·град.

Таким образом, нам удалось четко фиксировать в интервале температур  $-40 \div +53^\circ$  две стабильные и две метастабильные модификации. При этом у разных полиморфных форм не только меняется величина коэффициента теплопроводности, но и значение температурного коэффициента теплопроводности.

Это может представлять интерес как при более углубленной трактовке природы превращений, так и при разнообразных теплофизических задачах, связанных с прохождением тепла через твердые органические вещества.

Институт общей и неорганической химии  
им. Н. С. Курнакова  
Академии наук СССР

Поступило  
23\_XI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> G. W. C. Kaye, W. F. Higgins, Proc. Roy. Soc., A, 122, 633 (1929).
- <sup>2</sup> К. Веск, К. Еbbinghaus, Ber., 39, 3870 (1906). <sup>3</sup> М. Ф. Вукс, ЖЭТФ, 7, 270 (1937).
- <sup>4</sup> В. И. Данилов, Д. Е. Овсиенко, ДАН, 73, № 6, 1169 (1950).
- <sup>5</sup> G. A. Jeffrey, W. J. McVeagh, J. Chem. Phys., 23, № 6, 1165 (1955).
- <sup>6</sup> Г. М. Кондратьев, Тепловые измерения, М.—Л., 1957.

Академик Викт. И. СПИЦЫН, В. А. ПЧЕЛКИН и И. В. ГОНЧАРОВ

## К ВОПРОСУ О ДЕЙСТВИИ ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНЫХ ВЕЩЕСТВ НА КИНЕТИКУ РАСТВОРЕНИЯ КАРБОНАТА КАЛЬЦИЯ В МИНЕРАЛЬНЫХ КИСЛОТАХ

Сведения о влиянии поверхностно-активных веществ на растворение карбонатов в кислотах весьма ограничены. Вместе с тем изучение действия ингибиторов на скорость растворения карбонатов в кислотах имеет не только научный, но и практический интерес, особенно в процессах кислотного выщелачивания отдельных элементов из карбонатных руд. Непосредственно к рассматриваемому вопросу относится лишь одна известная нам работа П. А. Ребиндера (<sup>1</sup>), в которой исследовалось влияние жирных и ароматических кислот и фенолов на скорость растворения отдельных кристаллов кальцита в водных растворах серной и соляной кислот. Было обнаружено, что *n*-гептиловая кислота в значительной степени уменьшает скорость растворения монокристаллов кальцита в соляной кислоте.

При выполнении настоящей работы основное внимание было уделено изысканию новых поверхностно-активных веществ, которые наиболее эффективно подавляют растворение карбоната кальция в кислотах. С этой целью изучено влияние более двадцати веществ следующих различных классов соединений.

1. Гидрофильные высокомолекулярные вещества: столярный клей, агар-агар, крахмал, желатина, гуммиарабик и сульфитно-спиртовая барда.

2. Анионоактивные вещества: *n*-гептиловая и олеиновая кислоты.

3. Катионоактивные вещества: а) соли алифатических аминов — октадециламина, триэтиламина, триизоамиламина, триоктиламина, амина состава  $R-CH_2-CH(NH_2)-CH_3$ , где  $R$  — углеводородный радикал с 13—16 атомами углерода, смеси нафтеновых аминов; б) соли ароматических аминов — анилина, *p*-толуидина,  $\alpha$ -нафтиламина; в) соли четвертичных аммониевых оснований — триметилэтил- и тетраэтиламмония.

4. Отдельные представители других классов соединений, например диметилсилоксан и другие.

Подбор подавителей растворения карбоната кальция в кислотах основывался главным образом на различии в их химическом строении, т. е. на различии гидрофильных групп и гидрофобных радикалов, а также различий в характере промежуточных связей между ними (<sup>2</sup>). Следует иметь в виду, что установление зависимости свойств поверхностно-активных веществ от их структуры связано с вопросом выбора того или иного свойства для исследования. Эта задача не представляет особых трудностей, если речь идет о таких физико-химических свойствах, как поверхностное натяжение или солюбилизующая способность. Напротив, она оказывается значительно более трудной, если исследованию подлежат такие технологически важные свойства, как пассивирующее действие, флотированная и эмульгирующая способность и другие.

На данном этапе работы мы не ставили перед собой задачи глубокого физико-химического изучения природы протекающих процессов, а ограничились изучением лишь качественного влияния добавок на скорость растворения карбоната кальция в кислотах.

На рис. 1 в качестве примера приведены кривые, изображающие зависимость скорости растворения кристаллов кальцита ( $1500 \text{ мм}^2$ ) от времени в  $0,77 \text{ M}$  растворе соляной кислоты для *n*-гептиловой, олеиновой и изооктилфосфорной кислот. Эти кинетические кривые построены на основе усредненных данных для каждой точки из 4—6 опытов. По оси ординат отложена скорость растворения  $dx/dt$  в миллиграммах  $\text{CaCO}_3$  в минуту, вычисленная по объему выделившегося углекислого газа. Во всех случаях параллельно проводились опыты с введением и без введения поверхностно-активных веществ, что позволяет установить влияние последних на скорость растворения. Так как задачей исследования являлось установление относительного изменения скорости процесса при введении в раствор поверхностно-активных веществ, то определение поверхности кристаллов, изменяющейся в ходе растворения, в данном случае не представляло интереса. Как видно из рис. 1, наибольшим подавляющим действием на растворение кальцита из этих поверхностно-активных веществ обладает изооктилфосфорная кислота.

Исследование действия других перечисленных выше веществ проводилось на кальците, измельченном до крупности  $-0,5 + 0,175 \text{ мм}$ , в сернокислом растворе. В круглые плоскодонные колбы с узким горлом емкостью  $250 \text{ мл}$  помещалось  $50 \text{ мл}$   $0,5 \text{ M}$  раствора серной кислоты и раствор поверхностно-активного вещества. После одновременного помещения одинаковых навесок ( $2\text{—}3 \text{ г}$ ) кальцита в раствор содержимое колб так же, как и в опытах с соляной кисло-

той, перемешивалось на встряхивательном аппарате в течение определенного времени ( $1,5\text{—}2,5 \text{ часа}$ ). Затем раствор отцентрифугировался и гитрованием КОН с метиловым красным определялась конечная кислотность раствора. Путем сравнения средних значений растворения  $\text{CaCO}_3$  в холостых опытах и опытах с поверхностно-активным веществом рассчитывался относительный процент подавления растворения.

Для веществ, проявивших определенное пассивирующее действие, строились кривые зависимости относительного процента подавления растворения кальцита ( $\epsilon$ ) от их концентрации ( $C$ ). Как видно из рис. 2 (кривая 3), концентрация цетилсульфата в растворе оказывает существенное влияние на подавление растворения кальцита. При этом максимальное подавление (около  $14\%$ ) наблюдается при относительно малой концентрации цетилсульфата ( $0,08\text{—}0,15 \text{ г/л}$ ), дальнейшее увеличение концентрации до  $0,55 \text{ г/л}$  уменьшает подавление до  $6,5\%$ . Значительно менее эффективными оказались добавки клея и агар-агара (кривые 2 и 1). Довольно эффективными оказались сернокислые соли смеси нафтяных аминов, *n*-толуидина и октадециламина (кривые 4, 5 и 6).

Более эффективными ингибиторами оказались соли других аминов. Максимальное подавляющее действие, из испытанных нами веществ, проявили сернокислые соли тринизоамиламина, триоктиламина и  $\alpha$ -нафтиламина (рис. 3). Как правило, наиболее крутой подъем кривых зависимости пассивирующего действия солей аминов от их концентрации в растворе наблюдается при малых концентрациях. В данном случае изучение влияния добавок сернокислого  $\alpha$ -нафтиламина проводилось на фракции кальцита  $-0,175 \text{ мм}$ , тринизоамиламина и триоктиламина — на фракции  $-0,40 + 0,315 \text{ мм}$ .

Исследование влияния добавок сернокислого амина состава  $\text{R—CH}_2\text{—CH(NH}_2\text{)—CH}_3$  и представителя класса кремнийорганических соединений —

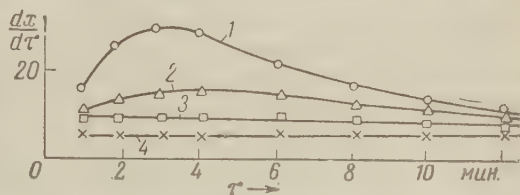


Рис. 1. Влияние поверхностно-активных веществ на скорость растворения кальцита от времени в растворе соляной кислоты. 1 — без добавки; 2 —  $0,00024 \text{ моль/л}$  *n*-гептиловой кислоты; 3 —  $0,00024 \text{ моль/л}$  олеиновой кислоты; 4 — приблизительно  $0,0003 \text{ моль/л}$  изооктилфосфорной кислоты

диметилсилоксана — проводилось волюметрическим методом, т. е. по объему выделившегося углекислого газа, на фракции кальцита — 0,40 + + 0,315 мм. При этом концентрация амина составляла 0,63 г/л, диметилсилоксана 1,30 г/л. Экспериментальные результаты представлены в табл. 1.

В табл. 1 знаком (+) отмечается ускоряющее действие, выраженное в относительных процентах. Как видно из табл. 1, влияние амина на растворение карбоната кальция весьма своеобразное. Значительное подавление, имеющее место в начальный момент времени, быстро убывает, а по истечении 8—10 мин. от начала реакции, наоборот, наблюдается ускорение растворения кальцита. Этот факт, проявляющийся в условиях убывающей концентрации серной кислоты, объясняется, по-видимому, уменьшением прочности слоя  $\text{CaSO}_4$  на поверхности карбоната кальция, обусловленным влиянием данного ингибитора<sup>(3)</sup>. Подобно аминам, пассивирующее действие добавок диметилсилоксана со временем ослабевает.

Из испытанных нами веществ желатина, крахмал, гуммиарабик, крезоловый и ксиленоловый аэрофлоты, сернокислые соли триэтиламина, анилин-

Таблица 1

Влияние сернокислого амина состава  $\text{R}-\text{CH}_2-\text{CH}(\text{NH}_2)-\text{CH}_3$  и диметилсилоксана на растворение кальцита в 0,5 М серной кислоте

Время от начала реакции, мин.	Относительное подавление растворения кальцита, %	
	сернокислая соль $\text{R}-\text{CH}_2-\text{CH}(\text{NH}_2)-\text{CH}_3$	диметилсилоксан
2	+45,0	+18,0
5	+12,9	+18,0
10	— 3,3	+17,5
20	—11,0	+15,3
30	—10,0	+14,0

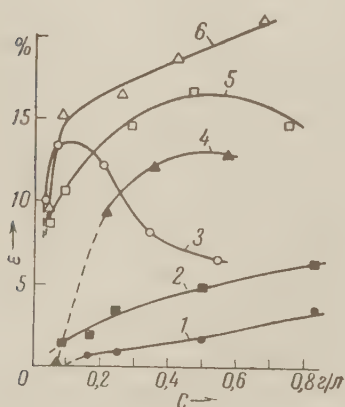


Рис. 2. Влияние концентрации агара (1), клея (2), цетилсульфата (3), сернокислых солей смеси нафтоновых аминов (4), *n*-толуидина (5) и октадециламина (6) на растворение кальцита в 0,5 М  $\text{H}_2\text{SO}_4$

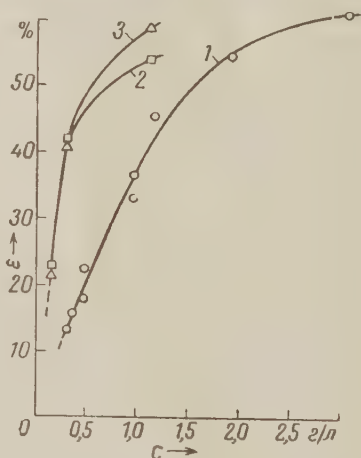


Рис. 3. Влияние концентрации сернокислых солей  $\alpha$ -нафтиламина (1), триоктиламина (2) и триизоамиламина (3) на растворение кальцита в 0,5 М  $\text{H}_2\text{SO}_4$

на, триметилэтил- и тетраэтиламмония не оказали сколько-нибудь существенного влияния на растворение кальцита независимо от их концентрации (до 3 г/л), а также порядка их внесения в раствор.

Таким образом, в результате исследования большого ассортимента веществ, относящихся к различным классам соединений, получены определенные представления об ингибирующем действии поверхностно-активных веществ на растворение карбоната кальция в серной кислоте. Весьма эффективными подавителями растворения карбоната кальция являются некоторые амины. Характерно, что как для алифатических, так и для ароматических аминов наблюдается определенная закономерность роста подавляю-

шего действия с развитием гидрофобной части молекулы. Например, в ряду анилин — *n*-толуидин —  $\alpha$ -нафтиламин в соответствии с усложнением гидрофобного радикала наблюдается увеличение депрессирующего действия. При одинаковом числе атомов углерода в аминах, амины изостроения, по-видимому, должны обладать большим действием в связи с их большей гидрофобностью. Как правило, с уменьшением растворимости амина в воде подавляющее действие его возрастает. В отличие от низших представителей четвертичных аммониевых солей, оказавшихся неэффективными, соли четвертичных аммониевых оснований, содержащие алкильные группы с большим числом атомов углерода, например  $C_8$  и выше, нельзя заранее считать непригодными в качестве подавителей растворения карбоната кальция в кислотах.

В заключение считаем своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность акад. П. А. Ребиндеру за полезные замечания при оформлении настоящей работы.

Поступило  
7 I 1961

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> П. А. Ребиндер, К. П. Ребиндер, ЖФХ, 1, № 2, 175 (1930).  
<sup>2</sup> А. Шварц, Д. Ж. Перри, Поверхностно-активные вещества, ИЛ, 1953. <sup>3</sup> К. Бейли, Торможение химических реакций, Л.—М., 1940.

ХИМИЧЕСКАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

В. С. СОТНИКОВ и А. С. БЕЛАНОВСКИЙ

АДСОРБЦИЯ ИОНОВ НЕКОТОРЫХ МЕТАЛЛОВ ПРИ ТРАВЛЕНИИ  
И ПРОМЫВКЕ ГЕРМАНИЯ И КРЕМНИЯ

(Представлено академиком А. Н. Фрумжиным 9 IX 1960)

**Общие замечания.** Электрические параметры и стабильности кристаллических полупроводниковых приборов, особенно приборов, которые преобразуют лучистую энергию в электрическую, существенно зависят от состояния поверхности полупроводника. Известно, что нестабильность поверхности германия, кремния и электронно-дырочных переходов обусловлена главным образом взаимодействием поверхности с окружающей средой (различные газы, пары воды и органических веществ) <sup>(1-5)</sup>. Однако в литературе почти отсутствуют данные по адсорбции ионов металлов из травителей, применяющихся при современной технологии производства германия, кремния и электронно-дырочных переходов <sup>(6)</sup>. Используемые для травления полупроводниковых материалов и приборов растворы щелочей, смесь плавиковой и азотной кислот, перекись водорода высокой степени чистоты содержат в качестве примесей ионы тяжелых металлов (медь, железо, серебро и др.) в количестве от  $1 \cdot 10^{-5}$  до  $1 \cdot 10^{-3}\%$ . Это относится к дистиллированной воде, применяемой при промывке германия, кремния и электронно-дырочных переходов.

Влияние указанных примесей, адсорбируемых поверхностью твердого тела, на параметры как полупроводниковых приборов (коэффициент шумов, коэффициент усиления по току, обратные токи, предельная частота), так и на параметры полупроводника (скорость поверхностной рекомбинации, работа выхода), почти не рассматривается в литературе. В связи с этим исследование поведения примесей в процессе травления и промывки германия и кремния является весьма важным вопросом, так как наличие их на поверхности, даже при малом содержании, может оказывать отрицательное влияние на электрические свойства материала или прибора, в котором он используется.

Работа проводилась на шлифованных пластинках (образцы) размером  $3 \times 3 \times 0,25$  мм, нарезанных из германия или кремния *n*- и *p*-типа, ориентированных в плоскости 111, с удельным сопротивлением 15 ом·см.

В качестве травителей использовались растворы 30%  $H_2O_2$ , 10% КОН, смесь азотной и плавиковой кислот (42% HF и 60%  $HNO_3$ ) в соотношении 1 : 4, в которые вводились радиоактивные индикаторы в виде азотнокислых и хлорных солей. Удельная активность растворов в различных опытах была в пределах от 0,1 до 5 мКи/мл.

Для возможности количественного определения числа атомов, адсорбируемых образцом, предварительно измерялась активность травителя. С этой целью алюминиевая чашечка покрывалась слоем парафина, в котором делалось квадратное углубление размером  $3 \times 3$  мм, а затем в это углубление помещалось 0,01 мл травителя и проводилось измерение активности с учетом самопоглощения  $\beta$ -излучения в жидкости. После этого при той же геометрии измерялась активность с одной поверхности образца (вторая поверхность сошлифовывалась).

Адсорбция ионов P, Fe, Cu, Ag, Au, Zn, In, Na Rb и Sb при травлении германия и кремния. В аликвотной асти травителя проводилось травление образца в течение 3,0 мин. при комнатной температуре в смеси азотной и плавиковой кислот и при нагревании  $H_2O_2$  и в KOH.

С целью удаления с поверхности остатков радиоактивного травителя образцы промывались в этиловом спирте, подсушивались на фильтровальной бумаге, после чего измерялась их активность.

Полученные результаты приведены в табл. 1.

Таблица 1

Адсорбция германием различных элементов при травлении в  $H_2O_2$  и KOH и смеси кислот и KOH

Элемент	Конц. элемента в растворе, %*	$n_0$ , ат/см <sup>2</sup>	Конц. элемента в растворе, %	$n_0$ , ат/см <sup>2</sup>
$H_2O_2$			KOH	
Фосфор	$6,16 \cdot 10^{-2}$	$2,08 \cdot 10^{15}$	$2,59 \cdot 10^{-3}$	$1,36 \cdot 10^{17}$
Железо	$1,41 \cdot 10^{-2}$	$2,90 \cdot 10^{15}$	$7,00 \cdot 10^{-5}$	$4,75 \cdot 10^{15}$
Медь	$9,90 \cdot 10^{-3}$	$3,28 \cdot 10^{17}$	$1,34 \cdot 10^{-4}$	$8,36 \cdot 10^{14}$
Серебро	$3,72 \cdot 10^{-3}$	$2,06 \cdot 10^{16}$	$1,08 \cdot 10^{-4}$	$4,34 \cdot 10^{16}$
Золото	$1,01 \cdot 10^{-3}$	$1,80 \cdot 10^{16}$	$1,0 \cdot 10^{-6}$	$1,22 \cdot 10^{12}$
Цинк	$1,93 \cdot 10^{-3}$	$4,76 \cdot 10^{14}$	$3,58 \cdot 10^{-3}$	$6,80 \cdot 10^{14}$
Индий	$1,80 \cdot 10^{-2}$	$2,85 \cdot 10^{16}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$2,69 \cdot 10^{16}$
Натрий	$1,0 \cdot 10^{-1}$	$5,92 \cdot 10^{16}$	$2,06 \cdot 10^{-2}$	$9,40 \cdot 10^{15}$
Рубидий	$7,18 \cdot 10^{-3}$	$1,12 \cdot 10^{15}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$8,95 \cdot 10^{13}$
Сурьма	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$4,57 \cdot 10^{13}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$3,38 \cdot 10^{18}$
$HNO_3 + HF$			KOH	
Фосфор	$2,10 \cdot 10^{-2}$	$1,85 \cdot 10^{16}$	$2,59 \cdot 10^{-3}$	$2,16 \cdot 10^{16}$
Железо	$1,45 \cdot 10^{-2}$	$3,44 \cdot 10^{16}$		
Медь	$4,50 \cdot 10^{-2}$	$2,59 \cdot 10^{15}$	$1,26 \cdot 10^{-4}$	$8,50 \cdot 10^{17}$
Серебро	$7,12 \cdot 10^{-3}$	$6,59 \cdot 10^{15}$	$1,08 \cdot 10^{-4}$	$2,50 \cdot 10^{14}$
Золото	$3,60 \cdot 10^{-4}$	$1,11 \cdot 10^{16}$	$1,00 \cdot 10^{-5}$	$6,04 \cdot 10^{14}$
Цинк	$1,15 \cdot 10^{-2}$	$9,55 \cdot 10^{13}$	$3,58 \cdot 10^{-3}$	$1,37 \cdot 10^{15}$
Индий	$8,75 \cdot 10^{-3}$	$9,31 \cdot 10^{14}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$3,82 \cdot 10^{13}$
Сурьма	$6,52 \cdot 10^{-3}$	$1,11 \cdot 10^{16}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$2,21 \cdot 10^{18}$
Натрий	$5,0 \cdot 10^{-1}$	$4,92 \cdot 10^{16}$	$1,0 \cdot 10^{-1}$	$8,10 \cdot 10^{15}$
Рубидий	$6,71 \cdot 10^{-3}$	$7,56 \cdot 10^{13}$	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$8,90 \cdot 10^{13}$

\* Здесь и в дальнейшем имеются в виду объемные проценты.

Из приведенных результатов видно, что при травлении в указанных травителях происходит одновременно адсорбция на поверхности германия и кремния различных элементов.

Для фосфора, серебра и золота было показано, что адсорбция пропорциональна содержанию примесей в травителе.

Кроме того, была показана малая эффективность (для большинства из указанных элементов) многократной промывки протравленных образцов горячим бидистиллатом, так как удаление указанных примесей после таких промывок весьма незначительно.

Адсорбция ионов P, Fe, Cu, Ag, Au, Zn, In, Sb, Na и Rb из воды при промывке германия и кремния. Германий, кремний и электронно-дырочные переходы после обработки химическим травлением промываются водой. Промывка дистиллированной водой или бидистиллатом является последней стадией очистки поверхности от загрязнений. Поэтому исследование адсорбции примесей из воды представляет большой практический интерес. При работе использовался бидистиллат, в который добавлялась радиоактивная примесь.

Образцы германия или кремния после травления подсушивались для удаления с поверхности остатков кислот, затем при нагревании промывались бидистиллатом, в котором растворялся радиоактивный изотоп соответствующего элемента, в течение 3,0 мин., после чего вновь подсушивались на фильтровальной бумаге и помещались в счетную установку для измерения их активности.

Полученные результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2

Адсорбция различных элементов из воды при промывке германия и кремния

Элемент	Конц. элемента в растворе, %	$n_0$ , $\frac{\text{ат}}{\text{см}^2}$	Конц. элемента в растворе, %	$n_0$ , $\frac{\text{ат}}{\text{см}^2}$
	Германий		Кремний	
Фосфор	$6,10 \cdot 10^{-2}$	$1,16 \cdot 10^{16}$	$6,10 \cdot 10^{-2}$	$9,85 \cdot 10^{16}$
Железо	$5,74 \cdot 10^{-3}$	$4,65 \cdot 10^{14}$	$5,0 \cdot 10^{-4}$	$1,50 \cdot 10^{15}$
Медь	$9,90 \cdot 10^{-3}$	$1,38 \cdot 10^{18}$	$1,12 \cdot 10^{-4}$	$2,15 \cdot 10^{16}$
Серебро	$5,0 \cdot 10^{-3}$	$3,84 \cdot 10^{17}$	$2,49 \cdot 10^{-3}$	$1,63 \cdot 10^{15}$
Золото	$1,45 \cdot 10^{-5}$	$3,20 \cdot 10^{16}$	$8,80 \cdot 10^{-4}$	$2,24 \cdot 10^{17}$
Цинк	$1,92 \cdot 10^{-3}$	$8,55 \cdot 10^{14}$	$3,19 \cdot 10^{-3}$	$2,59 \cdot 10^{14}$
Индий	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$2,48 \cdot 10^{17}$	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$1,24 \cdot 10^{17}$
Натрий	$2,06 \cdot 10^{-2}$	$9,35 \cdot 10^{15}$	$1,03 \cdot 10^{-1}$	$6,46 \cdot 10^{16}$
Рубидий	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$2,27 \cdot 10^{15}$	$8,10 \cdot 10^{-3}$	$8,70 \cdot 10^{14}$
Сурьма	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$1,11 \cdot 10^{17}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$2,12 \cdot 10^{16}$

Для фосфора, меди и золота было показано, что адсорбция их пропорциональна времени промывки германия и кремния.

Использование комплексообразователей для очистки поверхности германия и кремния. Изве-

Таблица 3

Количество оставшегося элемента после обработки образцов в процентах к первоначальному количеству

Элемент	10-мин. промывка горячим бидистиллатом	10-мин. нагревание в растворе			
		дити-зона	KCN	CH <sub>3</sub> CN	трилон-Б

Германий

Медь	68,6	50,0	8,0	5,1	88,0
Серебро	39,4	8,0	0,1	0,3	—
Золото	38,9	93	0,2	1,2	41,2
Индий	92,3	99,1	16,0	67,0	5,6

Кремний

Медь	4,4	0,5	0,2	0,5	6,6
Серебро	92,1	1,0	1,0	21	42
Золото	90,5	80	25	59	—

Образцы германия или кремния с определенным по вышеуказанному методу количеством адсорбированного примесного элемента обрабатывались раствором комплексообразователя. После обработки вновь измерялась их активность. Для сравнения часть образцов подвергалась 10-кратной промывке горячим бидистиллатом.

Приведенные результаты показывают целесообразность использования комплексообразователей для обработки германия и кремния, а также

электронно-дырочных переходов с целью получения поверхностей высокой степени чистоты.

Наибольшее применение для обработки поверхностей полупроводниковых материалов найдут, возможно, органические комплексообразователи (ацетонитрил, дитизон и др.), так как они хорошо удаляют с поверхности ряд наиболее характерных примесей и, кроме того, остатки органических комплексообразователей всегда можно смыть с поверхности материала или перехода весьма чистыми органическими растворителями (четырёххлористый углерод, хлороформ, бензол и т. п.).

Этим самым на последней стадии очистки поверхности можно избежать использования воды, а следовательно, и дополнительного загрязнения за счёт адсорбции примесей из воды.

Действие комплексообразователей, в частности ацетонитрила, было проверено на полупроводниковых приборах.

Обработка кремниевых электронно-дырочных переходов ацетонитрилом позволила снизить обратный ток коллектора в 2—4 раза и повысить стабильность приборов.

Поступило  
20 IX 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> J. T. Law, J. Phys. Chem., 59, 1, 67 (1955); 59, 6, 543 (1955). <sup>2</sup> J. T. Law, S. Meigs, J. Appl. Phys., 26, 10, 1265 (1955). <sup>3</sup> В. И. Ляшенко, И. И. Степко, Изв. АН СССР, физ. сер., 6, 2, 211 (1952). <sup>4</sup> E. Clarke, Phys. Rev., 95, 1, 284 (1954). <sup>5</sup> В. И. Ляшенко, В. Г. Литовченко, ЖФХ, 28, в. 3, 118 (1958). И. М. Кулешов, А. Ф. Наумова, ЖФХ, 27, в. 1 (1957).

С. М. АНДРОНОВ

## НОВЫЕ ДАННЫЕ ПО СТРАТИГРАФИИ ДЕВОНСКИХ ОТЛОЖЕНИЙ ВОСТОЧНОГО СКЛОНА ЮЖНОГО УРАЛА

(Представлено академиком Н. М. Страховым 1 XII 1960)

Стратиграфия девонских отложений восточного склона Южного Урала до сих пор изучена недостаточно детально. В настоящее время существует несколько стратиграфических схем, разработанных различными исследователями (<sup>3, 5-7, 10</sup>) для отдельных районов этой территории.

Многолетние исследования автора позволили составить общую стратиграфическую схему для девонских отложений, которая выдерживается на всем протяжении восточного склона Южного Урала.

Разрез палеозойских отложений, развитых на восточном склоне Южного Урала, начинается мощной (не менее 2000 м) вулканогенной ирендыкской свитой, подразделяющейся на три подсвиты. В основании разреза располагается крыктинская подсвита, сложенная пироксен-плагиоклазовыми и плагиоклазовыми порфиритами, их лавобрекчиями и туфами. Мощность крыктинской подсвиты достигает 1500 м. Выше с размывом залегает толща диабазовых порфиритов, спилитов, альбитофиров и их туфов с прослойками и пачками яшм, относящаяся к карамалыташской подсвите. Мощность 500—1000 м. Венчает разрез ирендыкской свиты бугулыгирская подсвита, сложенная яшмами и кремнистыми туффитами сургучного, красного и зеленого цвета. Мощность от 50 до 150 м.

Стратиграфическому положению ирендыкской свиты и обоснованию силурийского возраста была посвящена отдельная работа (<sup>2</sup>).

На описанных отложениях с резким несогласием залегают девонские отложения, представленные тремя свитами (снизу вверх); сибайской, давлетовской и зилаирской. В сибайской свите (общей мощностью 450—650 м) выделяются четыре горизонта; хасановский, колмаковский, аскаровский и аушкульский. Хасановский горизонт залегает несогласно то на размытой поверхности бугулыгирских яшм, то на эффузивах карамалыташской подсвиты. Он имеет мощность от 50 до 75 м и сложен конгломератами, брекчиями с обломками и линзами рифогенных известняков с *Theodossia superba* Eichw., *Carinata arimaspa* Eichw., *Atrypa kolymensis* Nal., *Camartoechia pseudolivonica* Barr. и *Gypidula ivdelensis* Khod. Приведенная фауна с несомненностью свидетельствует о кобленц-эйфельском возрасте хасановского горизонта. Отложения хасановского горизонта постепенно сменяются толщей туфопесчаников, гравийных известковистых песчаников, конгломератов, кремнистых тонкослоистых туфов и различных кремнистых туффов. Эта толща, мощность 350—400 м, выделяется в калмаковский горизонт. В самой верхней его части, в известковистых гравийных песчаниках, автором была найдена фауна кораллов, определенных Н. Я. Спасским как *Calceola sandalina* var. *acuminata* Mansuy. Таким образом, верхняя часть калмаковского горизонта соответствует кальцеоловым слоям (верхний эйфель). Мощность калмаковского горизонта 350—400 м.

На размытой поверхности описанных отложений залегают породы аскаровского горизонта, представленные темно-зелеными алевролитами, аргиллитами и полимиктовыми мягкими песчаниками, мощностью 75—100 м.

В этих песчаниках встречено большое количество неопределимых растительных остатков.

Совершенно согласно выше залегают светло- и темно-серые массивные, реже слоистые известняки с *Enantiosphen* sp. и *Stringocephalus burtini* Deff., относящиеся к аушкульскому горизонту живетского яруса. Мощность аушкульского горизонта изменяется от 0 до 100 м.

С резким угловым несогласием на различных горизонтах сибайской свиты, а иногда на яшмах бугулыгирской подсвиты залегают давлетовская свита общей мощностью 550—850 м, представленная тремя горизонтами: татлыбаевским, мукасовским и колтубанским. Татлыбаевский горизонт, мощностью 500—700 м, представлен конгломератами, брекчиями, лавобрекчиями, зеленовато-серыми песчаниками и алевролитами с маломощными покровами порфиринов. В глыбах и гальках известняков нами были найдены *Stringocephalus burtini* Deff., что однозначно указывает на их франский возраст.

На татлыбаевском горизонте совершенно согласно залегают яшмы, кремнистые и кремнисто-глинистые сланцы с растительными остатками, относящиеся к мукасовскому горизонту, мощность которого составляет 50—100 м.

Кремнистые породы мукасовского горизонта вверх по разрезу постепенно сменяются светло- и темно-серыми массивными рифогенными известняками колтубанского горизонта, мощностью от 0 до 75 м. В известняках встречаются обильные остатки фауны, в том числе *Hypothyridina cuboides* Sow. и *Manticoceras intumescens* Beug., что дает основание отнести колтубанский горизонт к среднефранским слоям, являющимся возрастным аналогом мендымских слоев западного склона Южного Урала. Подробное обоснование возраста колтубанских известняков дано автором в особой статье (4).

С резким несогласием на известняках колтубанского, а местами на породах мукасовского и татлыбаевского горизонтов залегает зилайская свита, представленная в основании конгломератами с глыбами и гальками известняков колтубанского горизонта. Мощность конгломератов колеблется от 0 до 70 м. Кверху эти конгломераты постепенно переходят в глинистые и кремнисто-глинистые сланцы мощностью 10—50 м и, наконец, в толщу полимиктовых зеленых мягких песчаников с прослоями и пачками аргиллитов и алевролитов и кремнистых сланцев. Видимая мощность этой толщи 300—400 м. Возраст зилайской свиты на основании содержащейся в ней фауны и микрофлоры определяется как фаменский.

Как видно из приведенных данных, в разрезе девонских отложений восточного склона Южного Урала между живетским и франским веками устанавливается длительный перерыв, сопровождающийся резким угловым несогласием. Этот перерыв имеет региональный характер и прослежен нами в пределах всей территории Урала.

Выделенные нами горизонты: хасановский, калмаковский (кобленц-эйфель) и татлыбаевский (средний фран) — приблизительно соответствуют улутауской свите Л. С. Либровича в ее стратотипическом разрезе на г. Улутау (см. рис. 1). В этом разрезе живетские отложения (аскаровский и аушкульский горизонты нашей схемы) отсутствуют, в результате чего отложения татлыбаевского горизонта с угловым несогласием располагаются на породах калмаковского горизонта, а местами (г. Сагыл-тау у оз. Колтубан) на бугулыгирских яшмах. Полимиктовые песчаники и аргиллиты аскаровского и известняки аушкульского горизонтов (живет) Л. С. Либрович (5) в своей стратиграфической схеме рассматривал как подразделения, венчающие разрез улутауской свиты. Известняки аушкульского горизонта, по его представлениям, залегают среди яшм нижней половины мукасовского горизонта, представляя собой их фацию.

В свете новых данных выделение улутауской свиты в прежнем ее понимании нецелесообразно, так как она объединяет разнородные по литологии

ческому составу и резко разновозрастные отложения, разделенные крупным перерывом.

Ряд исследователей (<sup>7,8,10</sup>) в разрезе девонских отложений выделяют карантаускую свиту, представленную кремнистыми и глинистыми сланцами, туфогенными песчаниками, грауваковыми туфоконгломератами и реже эффузивами основного, среднего и кислого состава, мощностью до 500 м.

Система	Отдел	Ярус	Подъярус	Свита по С.М.Андронову	Горизонт или подсвита	Индекс	Литологическая колонка	Мощность м	№ горизонтов
Девонская	Верхний	Фаменский	Зилаирская	Зилаирская		D <sub>3</sub>		300-400	1
								50-100	2
								100-150	3
								150-200	4
								200-250	5
	Средний	Франский		Давлетовская	Татлы-баевский	D <sub>1</sub>		500-700	6
								100-150	7
								150-200	8
								200-250	9
								250-300	10
Силурийская	Средний	Жабытский и Зибетский	Улутауская	Сибайская	Аушкульский	D <sub>2</sub>		350-400	11
								400-450	12
								450-500	13
Ирендыкская					Кара-лыташск.	S <sub>1</sub>		500-1000	14
								1000-1500	15
								1500-2000	16

Рис. 1. Сводный стратиграфический разрез восточного склона Южного Урала. 1 — песчаники зеленые, полимиктовые, мягкие, с прослоями и пачками алевролитов, аргиллитов и кремнистых сланцев; 2 — сланцы глинистые и кремнисто-глинистые; 3 — конгломераты, песчаники сильно известковистые, иногда переходящие в песчаные известняки; 4 — известняки светло- и темно-серые, массивные, рифогенные, с *Hypothyridina cuboides* и *Manticoceras intumescens*; 5 — кремнистые и кремнисто-глинистые сланцы с растительными остатками; 6 — конгломераты, брекчии, лавобрекчии, песчаники и алевролиты с маломощными покровами порфиритов; в глыбах и гальках известняков фауна *Stringocephalus burtini*; 7 — известняки светло- и темно-серые, массивные, иногда слоистые, с *Enantiosphen sp.* и *Stringocephalus burtini*; 8 — песчаники, алевролиты, аргиллиты зеленые, полимиктовые, мягкие, пишущиеся; 9 — различные туфы, туффиты и кремнистые породы, в верхах которых найдена *Calceola sandalina*; 10 — конгломераты, гравийные песчаники известковистые, с обломками и линзами известняков с *Theodossia superba* и *Carinatina arimaspia*; 11 — яшмы и различные кремнистые туффиты сургульного, красного и зеленого цветов; 12 — порфириты диабазовые, спиллиты, альбитофиры, кварцевые альбитофиры и их туфы, с прослоями и пачками яшм; 13 — порфириты, пироксен-плагиоклазовые, их лавобрекчии и туфы

Эта свита, по их мнению, располагается над мукасовскими кремнистыми сланцами и покрывается отложениями верхней части колтубанской свиты, нижняя же часть последней является фацией карантауской свиты. Наши исследования показали, что в этой части стратиграфического разреза толщи подобного литологического состава не существует. Над мукасовскими кремнистыми сланцами непосредственно залегают или известняки колтубан-

кого горизонта, или же, при их размыве, базальные конгломераты зилаирской свиты.

Наконец, в стратиграфической схеме Л. С. Либровича между нижней частью мукасовского горизонта и зилаирской свитой выделяется так называемая колтубанская свита. Под последней принято понимать мощную толщу (до 600 м), сложенную кремнистыми сланцами, известняками, конгломератами, отчасти туфами, туфопесчаниками, лавами порфиров, альбитоидов и кварцевых альбитофиров.

Наши исследования показали, что в колтубанскую свиту были объединены разнотипные и разновозрастные отложения ряда свит: конгломераты и гомогениты татлыбаевского горизонта, кремнистые породы мукасовского горизонта, колтубанские известняки, а также базальные конгломераты зилаирской свиты. Следовательно, как стратиграфическая единица такая свита не существует. Термин колтубанский горизонт следует сохранить лишь за известняками с фауной *Hypothyridina cuboides* Sow. и *Manticoceras intuscescens* Beyr., залегающими на мукасовских кремнистых сланцах и несогласно перекрытыми базальными конгломератами зилаирской свиты.

Из приведенных данных следует, что среди отложений девонского возраста на восточном склоне Южного Урала покровный вулканизм отмечается только в давлетовской подсвите, т. е. во франском ярусе. Во всех же остальных девонских толщах покровный вулканизм отсутствует.

Геологический институт  
Академии наук СССР

Поступило  
30 XI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> С. М. Андронов, ДАН, 135, № 5 (1960). <sup>2</sup> С. М. Андронов, ДАН, 137, № 4 (1961). <sup>3</sup> Е. В. Войнова и др., Геологическое строение Орско-Халиловского района, М., 1941. <sup>4</sup> Г. И. Кириченко, Тр. Центр. научно-иссл. геол.-разв. инст., № 122 (1940). <sup>5</sup> Л. С. Либрович, Тр. Центр. научно-иссл. геол.-разв. инст., № 81 (1936). <sup>6</sup> А. А. Малахов, Тр. Свердловск. горн. инст. им В. В. Вахрушева, № 22, Матер. по геологии Урала, 1955. <sup>7</sup> О. А. Нестоянова, Матер. по геол. и полезн. ископ. Южного Урала, в. 2 (1960). <sup>8</sup> О. А. Нестоянова, Сов. геол., № 11 (1959). <sup>9</sup> А. Петренко, Тр. Гл. геол.-разв. упр. НКПТ СССР, в. 250 (1932). <sup>10</sup> В. С. Шарфман, Сов. геол., № 8 (1959).

А. А. АРСЕНЬЕВ

## О ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАЗМЕЩЕНИЯ КИМБЕРЛИТОВ В ВОСТОЧНОЙ ЧАСТИ СИБИРСКОЙ ПЛАТФОРМЫ

(Представлено академиком Н. С. Шатским 27 VI 1960)

Геофизическими исследованиями северной части Сибирской платформы в последнее время <sup>(5)</sup> установлены крупные «субмеридиональные и субширотные, региональные дизъюнктивные зоны, в основании которых предполагаются глубинные разломы очень древнего происхождения, активизировавшиеся на различных этапах геологической истории».

Четыре из этих зон расположены в северо-восточной части Сибирской платформы. Центральная субмеридиональная дизъюнктивная зона простирается вдоль долины рр. Котуй и Мойеро и отчетливо фиксируется многочисленными приповерхностными разломами, обычно залеченными дайками траппов.

Восточная дизъюнктивная зона, простирающаяся, по геофизическим данным, вдоль среднего и нижнего течения рр. Оленек и Анабара, не имеет четких контуров в платформенном чехле.

Северная субширотная дизъюнктивная зона, простирающаяся от низовьев Котуя до низовьев Оленека, совпадает с южным бортом Лено-Хатангского краевого прогиба с его мощными отложениями верхнего палеозоя и мезозоя. Южная же дизъюнктивная зона, расположенная, по геофизическим данным, между верховьями рр. Мойеро и Мархи, в платформенном чехле, совершенно теряется на общем фоне почти сплошного поля трапповых интрузий, приуроченных к Вилюйско-Котуйской тектонической зоне дробления <sup>(12)</sup>.

Намеченные таким образом крупные дизъюнктивные зоны, связанные с глубинными разломами, не всегда совпадают с крупными зонами нарушений, четко проявленными в платформенном чехле северо-восточной части Сибирской платформы.

Наиболее крупная, северо-восточная, зона разломов платформенного чехла, выделенная Н. С. Зайцевым <sup>(11)</sup> и впоследствии И. И. Красновым и В. Л. Масайтисом <sup>(12)</sup> под именем Ангаро-Вилюйской, прослеживается от бассейна р. Ангары, а возможно, и еще дальше к юго-западу до бассейнов рр. Тунг и Муна на северо-востоке, окаймляя сначала Тунгусскую синеклизу с юго-востока, а затем Вилюйскую синеклизу — с северо-запада. Ввиду протяженности этой зоны далеко на северо-восток до границы платформы с Приверхоянским прогибом, нам кажется более целесообразным называть ее не Ангаро-Вилюйской, а Ангаро-Мунской дизъюнктивной зоной. Вторая крупная, северо-западная, зона разломов, названная И. И. Красновым и В. Л. Масайтисом <sup>(12)</sup> Вилюйско-Котуйской, по существу, имеет несколько более западное, чем северное, направление и прослеживается из бассейна верхнего течения Котуя на юго-восток в бассейн р. Мархи, в нижнем течении которой обрезаются более молодыми сбросами северо-восточного направления, окаймляющими Вилюйскую синеклизу, выполненную мезозойскими отложениями. По этой же причине, нам кажется, ее следует называть Мархинско-Котуйской дизъюнктивной зоной.

Анализируя имеющиеся в нашем распоряжении материалы, нетрудно убедиться, что упомянутые крупные дизъюнктивные зоны не случайны, а являются частью широкой закономерно расположенной сети аналогичных дизъюнктивных зон, покрывающей, вероятно, всю Сибирскую платформу (рис. 1). В северо-восточной части платформы выделяются еще три крупные дизъюнктивные зоны, располагающиеся параллельно вышеописанным. Это, во-первых, Молодо-Попигайская дизъюнктивная зона, четко фиксирующаяся многочисленными разломами северо-западного направления и обильными интрузиями и эффузиями основных пород трапповой формации, расположенных по тому же северо-западному направлению широкой полосой от бассейна р. Молодо на юго-востоке у границы платформы с Приверхоянским прогибом до бассейна р. Попигай на северо-западе. К этой же зоне, в бассейне р. Уджи (правый приток р. Анабар), приурочены обнаруженные в 1958 г. С. А. Гулиным несколько массивов щелочных пород Хатангского типа.

Вторая крупная дизъюнктивная зона, расположенная западнее анабарской антеклизы, также четко фиксируется многочисленными разломами северо-восточного простирания и широким распространением магматических образований трапповой формации, расположенных широкой полосой того же направления. Эта зона прослеживается от верховьев р. Котуй на юго-западе до среднего течения р. Попигай на северо-востоке, где, так же как и предыдущая зона, обрывается более молодыми сбросами, отграничивающими Сибирскую платформу от Лено-Хатангского мезозойского прогиба. В пределах Котуй-Попигайской зоны расположены также все известные в настоящее время интрузии ультраосновных и щелочных пород, распространенных в бассейнах рр. Котуй и Маймечи.

Третья дизъюнктивная зона — Мархинско-Оленекская, протягивающаяся от верховьев р. Мархи на юго-западе через бассейн среднего течения Оленек до северо-восточного выступа платформы в районе устья р. Пур, где р. Оленек резко поворачивает из северо-восточного на северо-западное простирание. Эта зона, фиксирующаяся многочисленными разломами преимущественно северо-восточного направления, отличается от предыдущих почти полным отсутствием траппов, появляющихся главным образом в областях пересечения Мархинско-Оленекской северо-восточной дизъюнктивной зоны с северо-западными Мархинско-Котуйской и Молодо-Попигайской дизъюнктивными зонами. Самой характерной чертой Мархинско-Оленекской дизъюнктивной зоны протяженностью более 800 км является ее насыщенность маг-

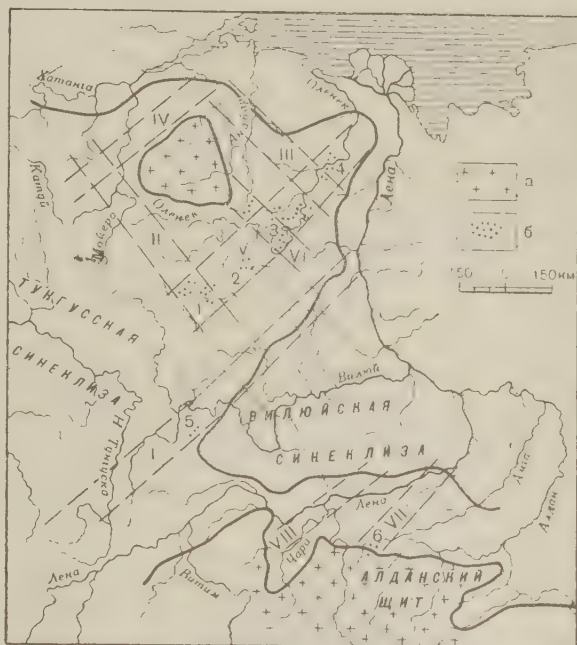


Рис. 1. Схема расположения дизъюнктивных структур северо-восточной части Сибирской платформы. а — выходы на поверхность кристаллического фундамента платформы; б — кимберлитовые трубки и дайки: 1 — Алакито-Далдынская группа, 2 — Мунская группа, 3 — Среднеоленинская группа, 4 — Куойско-Мэрчимдэнская группа, 5 — группа трубки «Мир», 6 — Алданская группа. I—VIII — дизъюнктивные зоны разломов: I — Ангари-Мунская, II — Мархинско-Котуйская, III — Молодо-Попигайская, IV — Котуй-Попигайская, V — Мархинско-Оленекская, VI — Мунско-Анабарская, VII — Чугино-Ленская, VIII — Чарская

матическими проявлениями ультраосновных, кимберлитовых пород, залегающих в виде даек и трубкообразных тел взрывного характера (кимберлитовые трубки). Все известные в настоящее время кимберлитовые трубки и дайки в количестве более 70 (кроме трубки «Мир» и алданских) приурочены к указанной выше Мархинско-Оленекской дизъюнктивной зоне.

В среднем течении р. Оленек намечается еще одна, несколько меньшая Мунско-Анабарская дизъюнктивная зона северо-западного направления, протягивающаяся от выступающего юго-восточного угла анабарской антеклизы на юго-восток через среднее течение р. Оленек в районе ее левых притоков — Укукит и Чемурдах — к нижнему течению р. Муны. К пересечению этой зоны с Мархинско-Оленекской приурочена самая многочисленная, среднеоленекская группа кимберлитовых трубок и даек.

Трубка «Мир», так же как и соседние с ней Таежная и Амакинская, расположены значительно южнее рассматриваемого района и приурочены к другой, самой крупной Ангаро-Мунской дизъюнктивной зоне. К северо-восточной дизъюнктивной зоне, характеризующейся также крупными разломами и трапповыми дайками того же направления, приурочены обнаруженные в последнее время в бассейне р. Чуги<sup>(16)</sup> алданские кимберлитовые тела. Эту зону, расположенную на северном склоне Алданского щита и скрывающуюся к северо-востоку под мезозойскими отложениями Вилуйской синеклизы, можно назвать Чугино-Ленской. К западу от нее, в районе нижнего течения рр. Чары и Олекмы, расположена Чарская дизъюнктивная зона того же северо-восточного простирания<sup>(8, 13)</sup>, в пределах которой расположено пять железорудных проявлений, связанных с дайками траппов.

Наличие описанных выше крупных дизъюнктивных зон, генетически связанных с глубинными разломами фундамента платформы, резко подчеркивается как простиранием контуров северо-восточной части Сибирской платформы, так и конфигурацией ее современной гидрографической сети.

Несколько слов следует сказать также о возрасте трещиноватости. Для окончательного решения этого вопроса в настоящее время еще нет достаточных материалов и поэтому пока можно отметить лишь некоторые факты, позволяющие высказать те или другие предположения. Естественно, что описанные дизъюнктивные зоны не могли образоваться в какой-либо единый, кратковременный (в геологическом смысле) этап, а развитие их было более сложно и продолжалось (а возможно — и продолжается) более длительно. Имеющиеся в нашем распоряжении материалы указывают, что начало заложения глубинных разломов относится по крайней мере к среднему палеозою, если не к более раннему времени, так как, конечно, их наличие обусловило проникновение на поверхность трапповой магмы, выполняющей большую часть тех или иных трещин в пределах дизъюнктивных зон. В дальнейшем активная жизнь этих зон продолжалась длительное время и заключалась, вероятно, в неоднократном переоткрытии существующих трещин и образовании новых разломов, возможно — более глубинных, чем предыдущие. Это заключение подтверждается проникновением на поверхность более молодой, по сравнению с траппами, ультраосновной и щелочной магмы в пределах Котуй-Попигайской, Молодо-Попигайской и Мархинско-Оленекской дизъюнктивных зон. Установленные в последнее время третичные лавы в пределах Попигайского грабена, расположенного на пересечении Котуй-Попигайской и Молодо-Попигайской дизъюнктивных зон, подтверждают, что тектоническая жизнь платформы, и в частности дизъюнктивных зон, хотя и гораздо менее активная, продолжается, возможно, до настоящего времени. Намечающаяся закономерность пространственного расположения дизъюнктивных зон в пределах северо-восточной части Сибирской платформы, помимо теоретического интереса, имеет очень большое практическое значение, так как эти структуры полностью контролируют магматическую и гидротермальную деятельность со всем многообразным комплексом полезных ископаемых (титан, флогопит, алмазы и т. д.).

Так, к Мархинско-Оленекской дизъюнктивной зоне приурочены все известные выходы ультраосновных кимберлитовых пород, в большинстве своем алмазоносных. Особенно благоприятными областями для проникновения магматических и гидротермальных образований с их полезными ископаемыми являются области пересечения дизъюнктивных зон северо-восточного и северо-западного простирания. Так, на пересечении Мархинско-Оленекской и Мархинско-Котуйской дизъюнктивных зон расположен Алаakit-Далдынский алмазоносный район, где на сравнительно небольшой площади обнаружено около сорока кимберлитовых трубок, приуроченных в основном к отдельным разломам или к линиям, им параллельным.

В этом же районе отмечаются наиболее интенсивные тектонические нарушения: мархинский вал, далдынская флексура и ряд других четко выраженных разломов северо-западного простирания.

Такие же нарушения и многочисленные кимберлитовые тела обнаружены в области пересечения Мархинско-Оленекской и Молодо-Попигайской дизъюнктивных зон, где в последнее время выявлен ряд отдельных разломов и грабенов, а также более 20 кимберлитовых трубок и даек (Куойкско-Мэрчимдэнская группа).

Такое же «кустовое» расположение кимберлитовых трубок отмечается и в других местах Мархинско-Оленекской дизъюнктивной зоны.

Из сказанного выше вытекает естественный вывод, что все кимберлитовые трубки приурочены к описанным дизъюнктивным зонам платформенного чехла и главным образом к их пересечениям, т. е. к областям, наиболее раздробленным и, тем самым, облегчающим проникновение кимберлитовой магмы на поверхность.

В настоящее время наиболее перспективными районами обнаружения новых кимберлитовых трубок являются северо-восточное окончание Мархинско-Оленекской дизъюнктивной зоны и Молодо-Попигайская зона на всем своем протяжении. Следует обратить внимание также на Мархинско-Котуйскую зону разломов, особенно в ее юго-восточной части, в области пересечения с Ангаро-Мунской зоной.

Геологический институт  
Академии наук СССР

Поступило  
16 VI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> А. А. Арсеньев, Н. С. Зайцев, Вестн. АН СССР, № 11 (1958). <sup>2</sup> И. П. Атласов, Тр. Научно-иссл. инст. геол. Арктики, 106 (1960). <sup>3</sup> И. П. Атласов, Информ. бюлл. Научно-иссл. инст. геол. Арктики, в. 2 (1957). <sup>4</sup> И. П. Атласов, Информ. бюлл. Научно-иссл. инст. геол. Арктики, в. 7 (1958). <sup>5</sup> И. П. Атласов, В. А. Ваккар, Информ. бюлл. Научно-иссл. инст. геол. Арктики, в. 7 (1958). <sup>6</sup> А. П. Бобриневич, М. А. Гневушев и др., Алмазы Сибири, 1957. <sup>7</sup> А. П. Бобриневич, М. А. Гневушев и др., Алмазные месторождения Якутии, М., 1959. <sup>8</sup> В. И. Гоньшак ова, Тр. Инст. геол. рудн. месторожд., петрогр., минералогии и геохимии, в. 29 (1959). <sup>9</sup> Р. М. Деменицкая, Тез. докл. научной сессии Ленингр. ун-в., секция геол. наук, 1956. <sup>10</sup> М. М. Ермолаев, Бюлл. Научно-технич. информ. Мин. геол. и охраны недр, № 2 (1957). <sup>11</sup> Н. С. Зайцев, Вopr. геологии Азии, 1, 1954. <sup>12</sup> И. И. Краснов, В. Л. Масайтис, Матер. ВСЕГЕИ, нов. сер., в. 7 (1955). <sup>13</sup> Т. Н. Спичарский, Геологическое строение и полезные ископаемые Восточной Сибири, 1958. <sup>14</sup> Н. А. Сягаев, Вестн. Московск. ун-в., № 1 (1956). <sup>15</sup> Н. С. Шатский, Бюлл. МОИП, отд. геол., в. 3—4 (1932). <sup>16</sup> Г. П. Шилина, С. М. Цейтлин, Сов. геол., № 10 (1959).

И. Я. БАЛЛАХ

## ПРОВЕРКА ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СЕЙСМОРАЗВЕДКИ ДЛЯ ПРЯМЫХ ПОИСКОВ НЕФТЕГАЗОВЫХ ЗАЛЕЖЕЙ

(Представлено академиком Д. И. Щербаковым 29 VI 1960)

В 1954 г. Институтом геологии и разработки горючих ископаемых АН СССР совместно с Геолого-геофизической службой Куйбышевской обл. начаты сейсмические наблюдения на Мухановской площади по опробованию возможности использования сейсморазведки для прямых поисков залежей нефти и газа. Первые обнадеживающие результаты, полученные в виде зарегистрированных отражений от водонефтяных контактов нефтегазовых залежей девона, карбона и перми, позволили в последующие два года продлить сейсмические работы, которые подтвердили возможность получения отражений от водонефтяных контактов. Эти отражения выделяются при тщательной визуальной корреляции сейсмограмм и прослеживаются на фоне наклонных отражающих поверхностей в пределах крыльев поднятий в виде горизонтальных отражающих площадок, иногда слегка наклоненных в сторону сводов этих поднятий. Для систематизации первичного сейсмического материала и его большего геологического осмысливания использовались профили времен отражений сейсмических волн <sup>(1)</sup>. При их помощи в ряде случаев становится возможным улучшать корреляцию сейсмограмм и, тем самым, более однозначно отождествлять волны в зонах интерференции. Наличие на сейсмограммах отражений от водонефтяных контактов проверялось также и методом математической статистики <sup>(5)</sup>. Физическое обоснование возможности получения отражений от водонефтяных контактов и обоснование различия скоростей сейсмических волн между продуктивными и законтуренными частями пластов приводится М. Ф. Мирчинком совместно с нами в работе <sup>(2)\*</sup>. Измерения скоростей упругих волн в нефтяных залежах приводятся в зарубежной литературе <sup>(4)</sup> и в работе <sup>(5)</sup>.

По геологическим данным, на Мухановской площади (рис. 1, М) указаны внешние и внутренние контуры нефтеносности пластов D<sub>II</sub>, D<sub>III</sub> и D<sub>IV</sub> терригенного комплекса девона.

По сейсмическим материалам (см. рис. 1), представилось возможным выделить несколько контуров нефтеносности \*\*. Северная граница этих контуров соответствует, по-видимому, контуру D<sub>II</sub>, который после полосы разрыва в 1200 м переходит на востоке от скважины № 27 в контур нерасчлененного комплекса девона — D<sub>III+IV</sub>. Внешний южный контур нефтеносности прослеживается от профиля I, пересекает профили XII и I<sup>a</sup>. Далее эта граница проводится условно до профиля V<sup>c</sup>, откуда она поворачивает на северо-запад, пересекает профиль XIII и V<sup>b</sup>, затем уходит на юго-запад до профиля V<sup>a</sup>. Этот контур, по-видимому, соответствует контуру D<sub>III</sub>. В северо-восточной части Мухановской площади несколько обособленно выделяется контур нефтеносности длиной 750 м. Он отмечается на профиле X и проходит через профиль II. Таков в общих

\* Физическая сущность использования сейсморазведки для прямых поисков нефтегазовых залежей была определена в 1952 г. на материке, полученном автором в пределах эпигерцинской платформы, в северо-западном Предкавказье, и сводится к выделению этих залежей по волновым сопротивлениям в окружающих горных породах <sup>(2,3)</sup>.

\*\* К настоящему времени в процессе совершенствования методики обработки сейсмограмм, обнаруживаются уточнения контуров нефтеносности. Однако мы считаем возможным и целесообразным оставить контуры в том их первоначальном построении, в каком они были получены автором в 1958 г.

ертах внешний контур нефтеносности терригенного комплекса девона в пределах восточной части Мухановской площади, составленный по сейсмическим материалам. Кроме того, была сделана попытка выделить нешние контуры отдельных продуктивных пластов и установить внутренние контуры нефтеносности. В северо-западной рассматриваемой части Мухановской площади эти участки контуров обозначены на рис. 1 символами  $D_{III}$ ,  $D_{IV}$  и  $D_{внутр}$ .

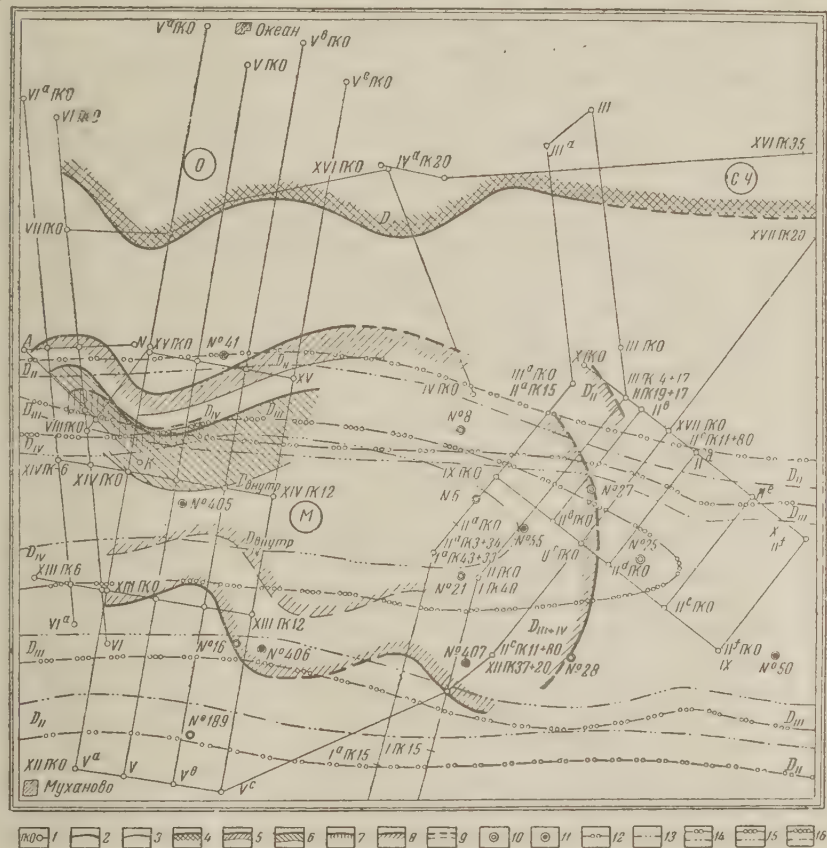


Рис. 1. Схематическая карта положения контуров нефтеносности терригенных отложений девона на Мухановской площади и предполагаемых Северо-Черновском и Океанском месторождениях нефти. По данным сейсморазведки: 1 — сейсмические профили; 2 — внешние контуры нефтеносности; 3 — внутренние контуры нефтеносности; 4 — южный внешний контур нефтеносности предполагаемых Северо-Черновского и Океанского месторождений нефти, севернее которого ожидается встретить не менее одного нефтенасыщенного пласта в отложениях терригенного комплекса девона; 5 — контур нефтеносности пласта  $D_{II}$  на Мухановской площади; 6 — то же пласта  $D_{III}$ ; 7 — то же пласта  $D_{IV}$ ; 8 — площадь распространения нефтенасыщенных пластов терригенного девона, отмеченных сейсмическим методом на Мухановской площади; 9 — условные контуры нефтеносности; С-Ч — Северо-Черновская площадь; О — Океанская площадь. По данным бурения: 10 — глубокие скважины, вскрывшие терригенную толщу нижнего карбона; 11 — глубокие скважины, вскрывшие терригенный девон; 12 — внешние контуры нефтеносности; 13 — внутренние контуры нефтеносности; 14 — контур нефтеносности пласта  $D_{II}$  на Мухановской площади; 15 — то же пласта  $D_{III}$ ; 16 — то же пласта  $D_{IV}$ ; М — Мухановская площадь

Линию, обозначенную в восточной части карты контуром  $D_{III+IV}$ , следует понимать как линию, оконтуривающую резкое уменьшение мощности нефтесодержащих частей продуктивных пластов  $D_{III}$  и  $D_{IV}$  в восточном направлении. По сейсмическим материалам трудно ответить на вопрос, является ли линия  $D_{III+IV}$  восточным внешним контуром нефтеносности пластов  $D_{III}$  и  $D_{IV}$  или она указывает лишь на наличие сд-

ловины (пережатия контуров) на этом участке площади, аналогичной той, которая проявляется в пределах пятых профилей. В пределах линии  $D_{III+IV}$  другие нефтеносные пласты ( $D_{II}$  и  $D_I$ ) по сейсмическим материалам не обнаруживаются. По-видимому, их контуры остаются открытыми в восточном направлении.

Сопоставление данных бурения и сейсморазведки показывает, что по сейсмическим материалам в пределах расположения пятых профилей обнаруживается резкий пережим контуров по всем прослеженным продуктивным пластам. Общая ширина залежи всего терригенного комплекса здесь меньше, чем по данным бурения. На запад и на восток от этого пережима ширина залежи увеличивается, причем относительное ее изменение резче, чем по данным бурения. Намечающийся в восточной части Мухановской площади пережим контуров пласта  $D_{III}$ , по геологическим данным, проходит в направлении с юга на север через конец профиля  $IX$  и конец профиля  $II^d$ , тогда как по сейсмическим наблюдениям контур  $D_{III+IV}$  замыкается. Как указывалось выше, по сейсмическим данным, на этом участке может быть только пережим контуров нефтеносности пластов  $D_{III+IV}$ . Тем не менее этот пережим смещен на 500—700 м к западу от пережима по буровым данным. Южный, нерасчлененный контур нефтеносности в общем смещен к северу по отношению к контуру пласта  $D_{III}$ , по геологическим данным, в юго-западной части рассматриваемой площади. Обращает на себя внимание различная ориентированность контуров всех пластов по сейсмическим и геологическим данным в пределах крайней северо-западной части карты на Мухановской площади. Сейсмические контуры, начиная от профиля  $VI$ , ориентированы на юго-запад, а геологические — на запад и северо-запад. Из сказанного видно, что контуры нефтеносности, составленные по сейсмическим материалам, в общих чертах повторяют контуры, составленные по данным буровых работ.

По аналогии с результатами на Мухановском нефтяном месторождении, в северной части карты приводится южный контур нефтеносности нерасчлененного терригенного комплекса девона —  $D$ , построенный по сейсмическим материалам. Этот контур протягивается по всей описываемой площади с запада на восток. В западной части контур приводится для южного окончания предполагаемой Океанской площади (рис. 1,  $O$ ), а в восточной части он приводится условно для предполагаемой Северо-Черновской площади (рис. 1,  $C-4$ ). Контур нефтеносности на этих площадях проводится по линии, севернее которой ожидается встретить не менее одного нефтесодержащего пласта в отложениях терригенного комплекса девона. Северные границы контура продуктивности этих отложений не обнаруживаются сейсмическими профилями Мухановской опытной партии.

В заключение отметим, что на Северо-Черновской и Океанской площадях, где глубокое разведочное бурение не проводилось, геологические данные о нефтеносности пород девона пока отсутствуют. Вместе с тем, по результатам наших сейсмических исследований, к северу от Мухановского нефтяного месторождения намечается, как указывалось, новая нефтяная залежь (рис. 1, контур  $D$ ). Поэтому, для объективной проверки возможности прямых поисков нефтегазовых залежей сейсморазведкой и их оконтуривания и степени достоверности прилагаемой карты, считаем необходимым провести здесь глубокое бурение. При этом наиболее целесообразным является постановка бурения глубоких скважин в зоне, расположенной между северными окончаниями сейсмических профилей  $VI$ ,  $V^a$ ,  $V^b$ ,  $IV^a$  и  $III$  Мухановской опытной партии, с одной стороны, и контуром  $D$  — с другой.

Институт геологии и разработки горючих ископаемых  
Академии наук СССР

Поступило  
26 VI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> И. Я. Баллах, Новости нефт. техн., сер. геол., в. 6 (1960). <sup>2</sup> И. Я. Баллах, М. Ф. Мирчинк, ДАН, 126, № 6 (1959). <sup>3</sup> И. Я. Баллах, Новости нефт. техн., сер. геол., в. 9 (1960). <sup>4</sup> W. G. Hicks, I. E. Vergu, Geophysics, 21, № 3, 739 (1956). <sup>5</sup> М. Ф. Мирчинк и др., Тр. научн.-технич. конфер., 1959, М., 1961 (в печати).

Д. И. ГОРЖЕВСКИЙ и Е. М. ЛАЗЬКО

## МОНГОЛО-ОХОТСКИЙ ГЛУБИННЫЙ РАЗЛОМ

(Представлено академиком Д. И. Щербаковым 18 X 1960)

Обширные геологические исследования, выполненные в послевоенные годы в пределах Забайкалья, Верхнего Приамурья и Приохотья, позволяют выделить в качестве важнейшей структурной линии глубинный разлом, отделяющий Монголо-Охотский складчатый пояс от докембрийских складчатых сооружений, примыкающих к нему с северо-запада.

Как известно, Монголо-Охотский пояс впервые был выделен А. Е. Ферсманом как геохимическая зона со специфической минерализацией<sup>(1)</sup>, однако позднее было установлено, что он представляет собой крупный геолого-структурный элемент мезозойской складчатости, резко отличающийся по особенностям строения и истории геологического развития от смежных краевых частей Сибирской платформы. Разделяющий две эти области крупнейший структурный шов, который мы будем называть Монголо-Охотским глубинным разломом\*, оказал большое влияние на особенности их геологического развития.

Отдельные звенья системы разломов, образующих эту глубинную структуру, неоднократно упоминались многими исследователями. Так например, М. С. Нагибина характеризует Южно-Янканскую и Южно-Тукурингскую зоны разломов в Верхнем Приамурье как длительно развивающиеся на значительном протяжении геологической истории; она же указывает на существование зон глубинных разломов в Восточном Забайкалье, располагающихся по границе с областью байкальской складчатости<sup>(5)</sup>; А. Д. Щеголов подчеркивает наличие мощных зон тектонических нарушений типа краевых швов, разделяющих территорию Западного Забайкалья на две крупные, резко отличающиеся одна от другой структурные области<sup>(12)</sup>; Л. И. Красный выделяет систему крупных разломов в Приохотье, где они отделяют область мезозойских структур от архейских и протерозойских структур восточной части Алданского щита<sup>(8)</sup>.

Упомянутые зоны крупных тектонических нарушений всеми исследователями рассматриваются изолированно и независимо друг от друга, однако накопившиеся к настоящему времени данные позволяют предполагать, что они являются составляющими единого, длительно развивавшегося структурного шва глубокого заложения, который мы относим к типу краевых глубинных разломов, отделяющих геосинклинальную область от соседней платформы. Этот разлом протягивается в Западном Забайкалье от границы МНР вдоль долины р. Чикоя, а затем вдоль рр. Ингоды и Шилки уже в пределах Восточного Забайкалья. От нижнего течения Шилки зона разломов отчетливо прослеживается в восточном направлении до верховьев р. Урхан (правый приток р. Зеи), но еще восточнее фиксируется с трудом и в настоящее время может быть намечена здесь в значительной степени условно: к ней, вероятно, приурочен крупный массив основных пород в нижнем течении р. Гилюя, а дальше она скрывается под осадками кайнозоя, выполняющими Верхнезейскую депрессию. Еще далее в северо-восточном направлении она снова прослеживается отчетливо вдоль северо-западного края мезозойского Удского прогиба, вплоть до берега Охотского моря в районе

\* Это название было раньше использовано В. Г. Васильевым и др., изучавшими часть рассматриваемого разлома в пределах Монгольской Народной Республики.

пос. Аян (рис. 1). Общая протяженность Монголо-Охотского глубинного разлома в пределах Советского Союза превышает 2000 км, и, таким образом, он принадлежит к числу крупнейших структур подобного типа.

Монголо-Охотский глубинный разлом ясно фиксируется на геологических картах в виде линии или узкой зоны, отделяющей область распространения мощных геосинклинальных формаций палеозоя и субгеосинклинальных отложений мезозойского возраста, расположенной южнее зоны разломов,

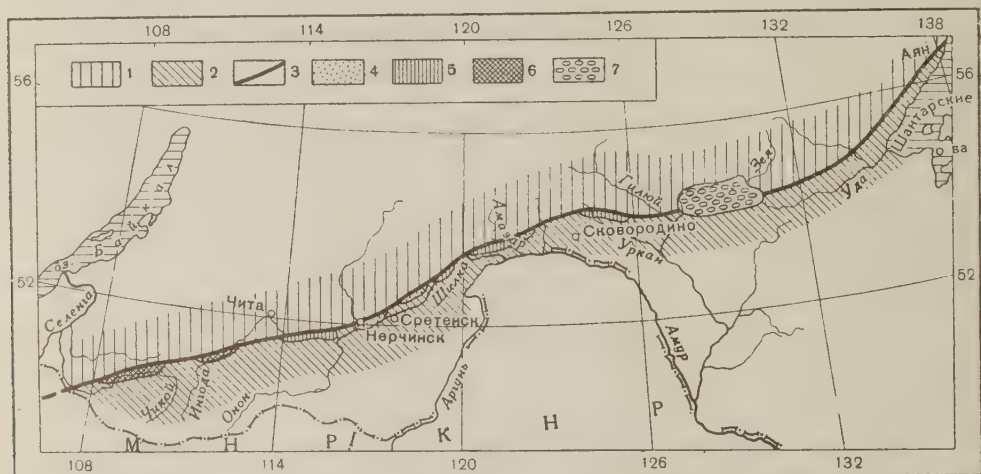


Рис. 1. Положение Монголо-Охотского глубинного разлома. 1 — область докембрийских складчатых сооружений, 2 — область палеозойских и мезозойских складчатых сооружений, 3 — Монголо-Охотский глубинный разлом, 4 — приразломные прогибы пермского и триасового возраста, 5 — приразломные прогибы юрского возраста, 6 — приразломные прогибы верхнеюрского — нижнемелового возраста, 7 — Верхнезайская депрессия, выполненная кайнозойскими осадками

от области, расположенной севернее, где чрезвычайно широко развиты разновозрастные интрузивы гранитоидов, а также разнообразные метаморфические и кристаллические сланцы, гнейсы и мигматиты преимущественно протерозойского возраста.

При геологическом картировании в ряде участков отчетливо выявляется дислокационная природа описываемого глубинного разлома. Так например, в западной части Верхнего Приамурья, между р. Шилкой и ст. Ерофей Павлович, зона разломов фиксируется в гнейсах и гранитоидах докембрия в виде полосы катаклазированных и милонитизированных пород шириной до 5—6 км; в участках развития отложений среднего палеозоя на левобережье Шилки она представлена полосой сильно кливажированных и метаморфизованных пород, пронизанных серией вытянутых вдоль зоны интрузивных массивов среднего и кислого состава, также подвергшихся интенсивному катаклазу. Мощные зоны развития брекчий и милонитов в древних гнейсах на контакте с верхнемезозойскими отложениями отмечаются также по Чикой, Ингоде и в других пунктах (4).

Одной из наиболее характерных особенностей Монголо-Охотского глубинного разлома является приуроченность к нему узких, но сильно вытянутых приразломных прогибов, выполненных главным образом верхнепалеозойскими и мезозойскими осадками. Наиболее древние из приразломных прогибов имеют пермский возраст. Один из них, недавно детально изученный Ю. Ф. Мисныком, располагается к северо-востоку от г. Сретенска и выполнен мощной толщей грубообломочных отложений.

Приразломные прогибы триасового возраста имеют широкое развитие, особенно в пределах Восточного Забайкалья, где с юго-запада на северо-восток выделяются крупные Нижнеингодинский (Карымский), Нерчинский и Сретенский прогибы, которые, возможно, представляют собой обособлен-

ые участки некогда единого крупного прогиба, протягивавшегося на расстояние свыше 300 км. Приразломные прогибы триасового возраста выявлены недавно Д. И. Горжевским и К. С. Шашкиным в Верхнем Приамурье). Триасовые отложения, выполняющие прогибы, относятся, вероятно, только к верхнему отделу системы и сложены морскими осадками, среди которых резко преобладают обломочные породы. Зафиксированная мощность триаса в восточнозабайкальских прогибах около 2 км; возможно, что первоначально она достигала значительно большей величины <sup>(2)</sup>.

В пределах Верхнего Приамурья хорошо изучены два приразломных прогиба — Холоджиканский и Кировский, выполненные ниже- и средне-палеозойскими грубообломочными континентальными отложениями, достигающими мощности 3,5 км. Как показали результаты детального геологического картирования, оба эти прогиба представляют собой узкие грабен-синклинали, вытянутые вдоль зоны разломов.

В Западном и Восточном Забайкалье известны крупные приразломные прогибы верхнемезозойского возраста — Чикойский и Верхнеингодинский, выполненные главным образом терригенными, нередко угленосными отложениями тургинской свиты мощностью в несколько сот метров <sup>(4)</sup>, а также Нижнеингодинский и Усть-Карский, в которых особенно широко развиты эрхнеюрские вулканогенные породы основного и среднего состава.

В долине верхнего течения р. Шилки имеются также небольшие прогибы, выполненные довольно мощными толщами грубообломочных отложений палеогенового возраста. Некоторые из названных выше приразломных прогибов испытывали интенсивные прогибания неоднократно, в результате чего они выполнены мощными толщами отложений разного возраста (Нижнеингодинский, Нерчинский и др.). Необходимо подчеркнуть, что почти все тмеченные приразломные прогибы располагаются в пределах Монголо-Охотского складчатого пояса и Даурской складчатой зоны и имеют прямые очертания северо-западных крыльев, обусловленные наличием рваных разрывов.

Тектонические подвижки вдоль зоны разлома продолжались, по-видимому, и на более поздних этапах кайнозойской эры, о чем свидетельствует приуроченность к этой зоне значительных отрезков долин современных рек, например Чикоя, Ингоды, Шилки.

С системой Монголо-Охотского глубинного разлома связаны многочисленные массивы интрузивных пород разного состава и различного геологического возраста. Так, на участке этого разлома в долине р. Шилки вдоль него вытягиваются резко удлиненные массивы верхнепалеозойских габбро и габбро-диоритов. В Верхнем Приамурье отчетливо проявляется приуроченность к зоне разлома послепалеозойских интрузивных тел: массивы этих пород обычно имеют небольшие размеры и по составу отвечают габбро (иногда габбро-перидотитам), диоритам и монцонитам. Еще восточнее, в Западном Приамурье, Л. И. Красный отмечает широкое развитие посленижнемеловых гранитоидов в виде многочисленных массивов, вытянутых вдоль зоны разломов по левобережью р. Уды и в Прибрежном хребте <sup>(3)</sup>.

В Забайкалье к описываемой зоне разломов приурочены неоднократные внедрения верхнемезозойских гипабиссальных массивов гранитоидов и обильной дайковой серии как кислого, так и основного состава <sup>(4, 13)</sup>.

Уместно здесь подчеркнуть, что в составе изверженных пород, связанных с характеризуемым разломом, продукты гранитоидной магмы играют сравнительно подчиненную роль, а главное значение имеют породы габбро-диоритового ряда.

Монголо-Охотский глубинный разлом имеет также большое минералогическое значение, являясь тектонической зоной, с которой связаны многочисленные месторождения полезных ископаемых и которая разграничивает различные металлогенические пояса. Особенно четко проявляется примыкающий к разлому непосредственно с северо-запада пояс золотых и молибденовых месторождений, впервые выделенный С. С. Смирновым в

1931 г.; этот же исследователь позже дал подробную характеристику пояса (<sup>9, 10</sup>). Последний следует называть золото-молибденово-турмалиновым (<sup>13</sup>), так как турмалин является типоморфным минералом в большинстве распространенных здесь золотых и молибденовых месторождений. Исследования последних лет показывают, что этот пояс не ограничивается Восточным Забайкальем, а прослеживается юго-западнее последнего в Западном Забайкалье (<sup>12</sup>), а также протягивается далеко на северо-восток — до Верхнезейской депрессии и, вероятно, еще далее в бассейн р. Уды, где известны молибденовые проявления (<sup>3</sup>). Таким образом, золото-молибденово-турмалиновый пояс, по-видимому, сопровождает Монголо-Охотский глубинный разлом на всем его огромном протяжении. Многие месторождения этого пояса, такие как Дарасун, Ключи, Давенда, Кировское и др., расположены непосредственно в зоне глубинного разлома или контролируются, вероятно, сопряженными с ней оперяющими разрывами.

В пределах обширной территории, расположенной южнее описываемого разлома, локализуются многочисленные вольфрамово-оловянные и полиметаллические месторождения Западного и Восточного Забайкалья, а также золотые и молибденовые месторождения, не принадлежащие к золото-молибденово-турмалиновой формации.

Все приведенные выше данные с несомненностью свидетельствуют о том, что Монголо-Охотский глубинный разлом играет весьма важную роль в истории геологического развития разграниченных им территорий. К северо-западу от него располагается область разновозрастных докембрийских структур, не испытавших существенных прогибаний в течение палеозойской эры; на западе — это область байкальской складчатости, которая сменяется уже на территории Верхнего Приамурья более древними протерозойскими сооружениями южной части Алданского щита, относимыми большинством исследователей к байкалидам без достаточных оснований. Расположенная юго-восточнее глубинного разлома геосинклинальная система Монголо-Охотского пояса испытывала интенсивные прогибания в течение нижнего и среднего, в меньшей степени — верхнего палеозоя. Начиная с пермского периода в зоне разлома началось формирование приразломных прогибов, продолжавшееся с перерывами в течение почти всей мезозойской эры. Подвижки вдоль зоны не прекратились и в кайнозое, но уже не были столь интенсивными. Глубинность и продолжительность формирования зоны подтверждаются также многочисленными внедрениями вдоль зоны разновозрастных интрузивов; в тесной связи с последними находится разнообразная, особенно золото-молибденово-турмалиновая минерализация.

На примере Монголо-Охотского глубинного разлома — одной из крупнейших структур этого типа в Советском Союзе — очень рельефно проявляется связь осадконакопления, складчатости и в особенности магматизма и минерализации с крупными длительно существующими тектоническими зонами глубокого заложения, впервые детально охарактеризованными А. В. Пейве и получившими от этого исследователя наименование глубинных разломов (<sup>6, 7, 8</sup>).

Львовский государственный университет  
им. Ив. Франко

Поступило  
17 X 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Д. И. Горжевский, К. С. Шашкин, ДАН, 131, № 4 (1960). <sup>2</sup> В. Н. Козеренко, Геологическое строение юго-восточной части Восточного Забайкалья, 1956. <sup>3</sup> Л. И. Красный, Бюлл. Всесоюз. научно-иссл. геол. инст., № 1 (1958). <sup>4</sup> М. С. Нагибина, Тр. Инст. геол. наук АН СССР, в. 128, 1 (1951). <sup>5</sup> М. С. Нагибина, Бюлл. МОИП, 33, № 3 (1958). <sup>6</sup> А. В. Пейве, Изв. АН СССР, сер. геол., № 5 (1945). <sup>7</sup> А. В. Пейве, Изв. АН СССР, сер. геол., № 1 (1956). <sup>8</sup> А. В. Пейве, Изв. АН СССР, сер. геол., № 3 (1966). <sup>9</sup> С. С. Смирнов, Тр. 1 Вост.-Сиб. краев. научно-иссл. съезда, № 1, геол. секц., 1931. <sup>10</sup> С. С. Смирнов, Очерк металлогении Восточного Забайкалья, 1944. <sup>11</sup> А. Е. Ферсман, Поверхность и недра, № 3 (1926). <sup>12</sup> А. Д. Щеглов, Инф. сборн., Всесоюз. научно-иссл. геол.-разв. инст., № 1 (1959). <sup>13</sup> А. А. Якжин, Сов. геол., Сборн. 50, 1956, стр. 125.

С. П. ГОРШКОВ

ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ВОЗРАСТ И ПАЛЕОГЕОГРАФИЧЕСКИЕ  
ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ТЕРРАС СРЕДНЕГО  
ТЕЧЕНИЯ ЕНИСЕЯ

(Представлено академиком А. Л. Янишиным 15 X 1960)

До настоящего времени возраст высоких террас р. Енисей определяется условно, в основном, — исходя из палеогеографических соображений. Поэтому произведенное рядом авторов (<sup>9, 8, 14</sup>) стратиграфическое расчленение аллювия внеледниковой зоны долины Енисея не может считаться окончательным. По тем же причинам проблема корреляции четвертичных отложений внеледниковой и ледниковой зон Приенисейского района остается открытой, хотя первые шаги в этом направлении уже сделаны (<sup>6, 18</sup>). Достаточно полное расчленение четвертичных отложений ледниковой зоны осуществлено на литолого-стратиграфической основе (<sup>1, 6, 7, 12, 13, 17</sup>). Однако его не удастся произвести подобным образом для однообразных по своему составу аллювиальных отложений внеледниковой зоны. Для выяснения их стратиграфии необходимы палеонтологические данные, в первую очередь — данные по ископаемой фауне млекопитающих.

В Красноярском районе в долине р. Енисей выделяется девять террас; VII (130—140 м), VI (100—120 м), V (70—80 м), IV (35—50 м), III (25—35 м), II (14—18 м), I (8—12 м), верхняя и нижняя пойма (6 и 4 м). Вниз по течению VII и VI террасы в районе с. Большая Мурта и с. Абалаково последовательно выходят на водораздел, а их аллювий замещается озерно-аллювиальными отложениями. Нижние семь террас хорошо прослеживаются на участке Красноярск — Колмогорово, повышаясь на 5—10 м каждая ниже устья р. Ангары, что объясняется увеличением глубины русла и высоты паводков на этом участке Енисея.

Отложения VII террасы достигают по мощности 15 м и представлены (снизу вверх) галечниками, суглинками и супесями. Галечники террасы в некоторых местах разрушены процессами выветривания, чего не наблюдается в разрезах остальных террас Енисея. В сопредельных районах подобные следы выветривания отмечены в аллювиальных отложениях, относящихся к концу плиоцена — началу нижнечетвертичного времени (<sup>5, 15</sup>). В разрезе VII террасы у с. Серебряково в линзе суглинка среди выветрелых галечников автор обнаружил *in situ* костные остатки *Elephas?* и *Rhinoceros* sp. (определение Э. А. Вангенгейм). В. В. Данилова установила, что содержание фтора в этих костных остатках равняется 0,49—0,50 по отношению к содержанию фторапатита в костях современных животных. По ее мнению, полученные фторовым методом результаты позволяют определить возраст собранной фауны как конец плиоцена.

VI терраса складывается галечниками и слоистыми суглинками, облессованными сверху, общей мощностью в 45 м.

Одновозрастные аллювию VII и VI террас буровато-серые, зеленовато-серые и сизые суглинки и глины с прослоями и линзами тонкозернистых песков залегают по восточной окраине Обь-Енисейского водораздела и на наиболее пониженных участках западной окраины Енисейского кряжа. Они имеют мощность 20—40 м, местами 70 м. М. Б. Садикова провела палинологическое изучение 46 образцов из скважины № 219 Красноярского геологического

ческого управления, пробуренной в этих отложениях на правом берегу Енисея, в районе г. Енисейска. По ее заключению, последние сформировались в два этапа, на протяжении которых климат изменился от сухого, умеренного, временами прохладного, до влажного и умеренного, близкого к современному.

Изложенные данные позволяют относить отложения VII террасы Енисея и синхронные ей озерно-аллювиальные осадки к концу плиоцена — началу нижнечетвертичного времени, а аллювий VI террасы и верхи озерно-аллювиальной толщи, судя по их стратиграфическому положению, — к нижнечетвертичному времени. На севере Приенисейского района в нижнечетвертичное время развивается досамаровская трансгрессия, которая, возможно, происходила с перерывом <sup>(1)</sup>.

Отложения V террасы, мощностью до 45 м, представлены галечниками, перекрытыми слоистыми супесями. В разрезе у с. Усть-Батой в слоистых супесях автор собрал *in situ* костные остатки *Coelodonta antiquitatis* Blum., *Elephas* sp., *Bos* (*Bison*) sp. (определение Э. А. Вангенгейм). В районе с. Кубеково в галечниках V террасы автор обнаружил *in situ* костные остатки *Canis lupus* L. и *Equus* sp. (определение И. А. Дуброво). И. Г. Пидопличко установил, что костные остатки собранной в районе с. Кубеково фауны имеют средний показатель прокаливания 544. Полученные методом прокалывания результаты позволяют считать, что относительный возраст этих находок не моложе первой половины среднечетвертичного времени <sup>(10)</sup>. У с. Кубекова в Ланковом логу, прорезающем V террасу, найдено мустьерское орудие <sup>(4)</sup>. Все перечисленное позволяет относить эту террасу к первой половине среднечетвертичного времени.

Это подтверждается и тем, что образование IV террасы Енисея произошло во вторую половину среднечетвертичного времени, о чем свидетельствуют находки в ее аллювии ископаемой фауны верхнепалеолитического комплекса в сочетании с ранним мамонтом <sup>(3)</sup>. Мощность галечников, песков и суглинков, слагающих эту террасу, равняется 40—45 м. В верхней половине ее разреза в Красноярском районе установлены следы мерзлотных сматий песков, солифлюкционного течения горизонта погребенной почвы, а у с. Анциферово автор описал прекрасно выраженный сингенетичный ископаемый «ледяной» клин. Изучение ископаемой пыльцы и спор (анализы М. В. Никольской и Е. А. Петровой) из аллювия IV террасы показало, что количество пыльцы древесных (преобладает пыльца *Pinus* и *Betula*) составляет 50—90% в средней части разреза террасы, а выше уменьшается до 10—50% на фоне увеличения процентного содержания пыльцы травянистых до 10—20% (преобладает пыльца *Gramineae* и разнотравья) и спор до 40—80% (преобладают споры *Bryales*). Результаты анализов свидетельствуют о том, что формирование аллювия IV террасы происходило при изменении климатических условий от близких современным к значительно более холодным. Последнее подтверждает наличие следов криогенных деформаций в верхней половине ее разреза.

На севере Приенисейского района в первую половину среднечетвертичного времени происходит отступление досамаровского моря и затем формируется озерный бассейн, подпруженный самаровским ледником <sup>(1,2)</sup>. Во вторую половину среднечетвертичного времени после деградации этого бассейна начинается санчуговская трансгрессия, которая продолжалась в течение тазовского оледенения <sup>(1)</sup>.

III терраса Енисея сложена галечниками и песками общей мощностью до 40 м. Е. А. Петровой установлено, что в верхах разреза террасы содержание пыльцы древесных (преобладает пыльца *Pinus* и *Betula*) то увеличивается до 60—70%, то уменьшается до 5—20%, причем интервалы уменьшения содержания пыльцы древесных растений несколько больше. Количество пыльцы травянистых (преобладает пыльца разнотравья и *Gramineae*, несколько меньше пыльцы *Chenopodiaceae* и *Artemisia*) равняется 10—30%. Содержание спор изменяется от 30 до 85% (преобладают споры *Bryales*, есть еди-

ничные зерна *Selaginella sibirica* (Milde) Hieron). На основании изложенного можно думать, что верхи III террасы формировались в более холодных, чем современные, климатических условиях. Аллювий III террасы моложе относящихся ко второй половине среднечетвертичного времени осадков IV террасы и древнее отложений II террасы, образование которой произошло в середине верхнечетвертичного времени (<sup>4,1</sup>). Поэтому III террасу мы относим к началу верхнечетвертичного времени.

В верхнечетвертичную эпоху сформировались также II и I террасы Енисея, что устанавливается по приуроченности к их отложениям остатков культуры и фауны верхнего палеолита (<sup>4</sup>). Возраст пойменных террас р. Енисей определяется как голоценовый по находке в аллювии верхней поймы орудий неолита (<sup>8</sup>). Каждая из четырех нижних террас сложена галечниками, песками и суглинками общей мощностью в 20—25 м. В галечниках II террасы в Красноярском районе нами обнаружено несколько ископаемых «ледяных» жил. На наличие следов криогенных деформаций в галечниках II террасы указывает также К. В. Радугин (<sup>11</sup>). Ко II террасе приурочена холоднолюбивая фауна стоянки Афоннтова гора II (<sup>4</sup>). М. В. Никольская и Е. А. Петрова установили, что, по спорово-пыльцевым данным, верхи II террасы формировались в климатических условиях, похожих на современные. В них содержание пыльцы древесных достигает 60—70% (преобладает пыльца *Pinus* и *Betula*), травянистых 20—30% (преобладает пыльца разнотравья и *Gramineae*), спор 20% (преобладают споры *Bryales* и *Sphagnales*). В начале отложения верхней пачки аллювия этой террасы климат, возможно, был более холодным (содержание пыльцы трав и кустарничков достигает 60—80%, встречены единичные зерна *Betula sec. Nanae* и *Thalictrum*). Последнее в известной мере подтверждается литолого-фациальными и палеонтологическими данными. Палинологической характеристикой I и верхней пойменной террас мы не располагаем. По данным М. Б. Садиковой, соотношение и состав пыльцы и спор из аллювия нижней поймы отражает основные черты современной растительности.

В ледниковой зоне Приенисейского района в начале верхнечетвертичной эпохи отступление санчуговского моря сменяется казанцевской трансгрессией, которая продолжается и в начале зырянского ледникового века (<sup>4</sup>). Меньшая по амплитуде трансгрессия моря, по-видимому, происходит в конце зырянского века и продолжается в каргинское межледниковье. Последующие понижения уровня моря, за которыми следовали незначительные по амплитуде трансгрессии, происходят в сартанский век, на рубеже верхнечетвертичного времени и голоцена (<sup>13</sup>) и в середине голоцена. Первое повышение уровня моря в голоцене, по-видимому, было вызвано эвстатическими причинами.

Поскольку на участке от г. Красноярск до устья р. Ангараы глубина Енисея на плесах равняется 5—7 м, а наибольшая высота паводков достигает 6—7 м, то нормальная мощность аллювия (<sup>16</sup>) здесь не должна превышать 11—14 м. Из этого можно заключить, что все террасы среднего Енисея во внеледниковой зоне, за исключением VII террасы, которая, возможно, размыта, имеют повышенную мощность аллювия. Причиной повсеместного накопления аллювия с повышенной мощностью может являться повышение базиса эрозии (<sup>16</sup>). В четвертичное время в Приенисейском районе устанавливается девять эпох повышения базиса эрозии, которые разделяются эпохами его понижения. Досамаровская трансгрессия происходила, по-видимому, в два этапа, на протяжении которых климатическая обстановка вряд ли испытывала резкие изменения (<sup>4</sup>). В это время в среднем течении Енисея сформировались VII и VI террасы и озерно-аллювиальные осадки восточной окраины Обь-Енисейского водораздела и наиболее пониженных участков западной окраины Енисейского кряжа. В эпоху существования самаровского приледникового озера, по-видимому, образовалась V терраса. Санчуговская трансгрессия началась в теплое время и продолжалась в тазовский ледниковый век; синхронные осадки IV террасы накапливались сначала

в теплых, а потом холодных климатических условиях. Начало казанцевской трансгрессии приурочивается к теплему времени, а ее завершение — к холодному зырянскому веку; относящаяся к этому промежутку времени III терраса в верхней части разреза характеризуется «холодными» спорово-пыльцевыми спектрами. Начавшаяся в конце зырянского века каргинская трансгрессия завершилась в условиях теплого климата; увязывающаяся с ней II терраса формировалась сначала в холодных, а затем в теплых условиях. Некоторые последующие повышения уровня моря происходят в холодное сартанское и дважды — в теплое голоценовое время. За этот промежуток времени образовались три нижние террасы Енисея.

Приведенные данные не могут не навести на мысль, что при каждом повышении базиса эрозии в долине р. Енисей накапливался повышенный по мощности аллювий одной из террас, а при понижении его происходил врез. Характерно, что меньшим амплитудам трансгрессий, начиная с конца зырянского века, отвечают меньшие мощности аллювия четырех нижних террас Енисея. Понятно, что серия прислоненных, хорошо выдержанных по простиранию енисейских террас могла образоваться только при условии общего поднятия территории при попеременном господстве процессов аккумуляции и размыва. Последнее, как известно, зависит от многих причин, однако в долине среднего Енисея образование террас контролировалось в первую очередь, колебаниями базиса эрозии.

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

Поступило  
10 X 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> С. А. Архипов, Тр. Геол. инст. АН СССР, 30 (1960). <sup>2</sup> С. А. Архипов, Ю. А. Лаврушин, Изв. АН СССР, сер. геол., № 6 (1957). <sup>3</sup> С. П. Горшков, Сборн. Матер. по геол. Красноярск. края, 1960. <sup>4</sup> В. И. Громов, Тр. Геол. инст. АН СССР, 64 (1948). <sup>5</sup> Н. А. Ефимцев, Тр. Геол. инст. АН СССР, 32 (1959). <sup>6</sup> В. А. Зубаков, ДАН, 120, № 5 (1958). <sup>7</sup> Ю. А. Лаврушин, Тр. Геол. инст. АН СССР, 32 (1959). <sup>8</sup> Л. Н. Ивановский, Тр. Томск. гос. унив., 132 (1954). <sup>9</sup> М. П. Нагорский, Вестн. Зап.-Сиб. геол. треста, № 5 (1937). <sup>10</sup> И. Г. Пидопличко, Тр. Комисс. по изуч. четвертичн. периода, 13 (1957). <sup>11</sup> К. В. Радугин, Матер. по геол. Красноярск. края, 2 (1937). <sup>12</sup> В. Н. Сакс, Тр. Научно-иссл. инст. геол. Арктики, 77 (1953). <sup>13</sup> Б. Н. Соколов, Тр. Научно-иссл. инст. геол. Арктики, 91 (1959). <sup>14</sup> В. В. Фениксова, И. А. Дуброво, Вестн. Моск. унив., 1 (1959). <sup>15</sup> С. М. Цейтлин, ДАН, 133, № 5 (1960). <sup>16</sup> Е. В. Шанцер, Тр. Геол. инст. АН СССР, 135 (1951). <sup>17</sup> С. Б. Шацкий, Тр. Томск. гос. унив., 133 (1956). <sup>18</sup> С. В. Эпштейн, Тр. Межвед. совещ. по стратигр. Сибири, 1957.

Н. Н. КАРЛОВ

КОНТИНЕНТАЛЬНАЯ КОСТЕНОСНАЯ БРЕКЦИЯ  
С ВЕТРОГРАННИКАМИ НА ЮЖНОМ СКЛОНЕ  
УКРАИНСКОГО КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО ЩИТА

(Представлено академиком Н. М. Страховым 6 XII 1960)

В долине р. Базавлук, пересекающей восточную часть Апостоловского района Днепропетровской обл., развиты песчано-галечные отложения, залегающие на поверхности докембрийских кристаллических пород, обнажающихся во многих местах в русле реки. Условия залегания этих отложений иллюстрируются приведенными ниже разрезами по разведочным шурфам, пройденным на правом берегу р. Базавлук близ пересечения его долины железнодорожной линией Никополь — Кривой Рог на перегоне ст. Чертомтык — ст. Подstepное.

Один из упомянутых шурфов, заложенный на расстоянии 210 м от русла реки, на высоте приблизительно 5 м над ее уровнем и 13 м над уровнем моря, вскрыл следующий разрез: 1) бурая, очень плотная и вязкая глина со сформированной на ней современной почвой (суглинистым черноземом); мощность слоя 3,5 м; 2) верхний песчано-галечный горизонт, состоящий из хорошо окатанной гальки кислых и основных изверженных пород, размерами до 5 см, смешанной с разнозернистым кварцевым песком; мощность слоя 1,3 м; 3) светло-серая известковистая глина с примесью мелкозернистого кварцевого песка; мощность слоя 0,7 м; 4) нижний песчано-галечный горизонт, сходный с верхним, но содержащий в слабо сцементированном песке между гальками обломки раковин палюдин и других пресноводных моллюсков; на глубине 6,5 м — фрагменты трубчатых костей млекопитающих; мощность слоя 2,8 м; 5) продукты разрушения кристаллических пород (зелено-беловатая дресва); мощность слоя 0,2 м.

Другой шурф, пройденный в с. Усть-Каменка, на правом берегу р. Базавлук, в 260 м к западу от русла, на высоте 7—8 м над уровнем реки и 15—16 м над уровнем моря, встретил такие слои: 1) бурая, очень плотная сухая глина; мощность слоя 2,5 м; 2) песчано-галечный горизонт, состоящий из зернистого разнозернистого кварцевого песка с гравием и хорошо окатанной галькой кислых и основных пород размерами до 5 см, а также большим количеством крупных (до 30 см) неокатанных обломков крепкой серой костеносной брекчии, определенной в полевых условиях как конгломерат; мощность слоя 5,25 м; 3) сильно трещиноватый, в верхней части разрушенный иотитовый гранит; мощность слоя 0,25 м. Обнаруженные в этом шурфе обломки костеносной брекчии представляют большой интерес, — с одной стороны, потому что подобные породы вне пещер встречаются чрезвычайно редко и до настоящего времени вообще не были известны в Приднепровье, а с другой — потому что в брекчии из Усть-Каменки заключены многочисленные ветрогранники с ясными признаками золотой обработки.

Изображенный на рис. 1 образец брекчии имеет длину 24,5 см, ширину 1,2 см и толщину 5,1 см; не несет следов окатывания водой и представляет репкую псефитовую породу желтовато-серого цвета, состоящую из угловатых разноразмерных обломков кварца, полевого шпата, зеленого хлоритового сланца, серого и розового пегматита, беловатого мелкозернистого пегматита и фрагментов трубчатых костей крупных млекопитающих; все эти обломки смешаны с разнозернистым песком и скреплены прочным известковым цементом, энергично реагирующим с  $\text{HCl}$ .

Под микроскопом видны многочисленные крупные (0,3—2 мм) угловатые зерна кварца, свежего полевого шпата (ортоклаза, микроклина и реже

плаггиоклаза), чешуйки биотита и хлорита, а также непрозрачные изоморфные зерна рудных минералов; из аксессуарных присутствуют циркон, апатит, рутил и др.; структура псаммитовая: цемент — типа пор, представлен нечистым вторичным карбонатом (кальцитом), местами окрашенным в желтоватый цвет гидроокисями железа и образующим мелкозернистые агрегаты в порах.

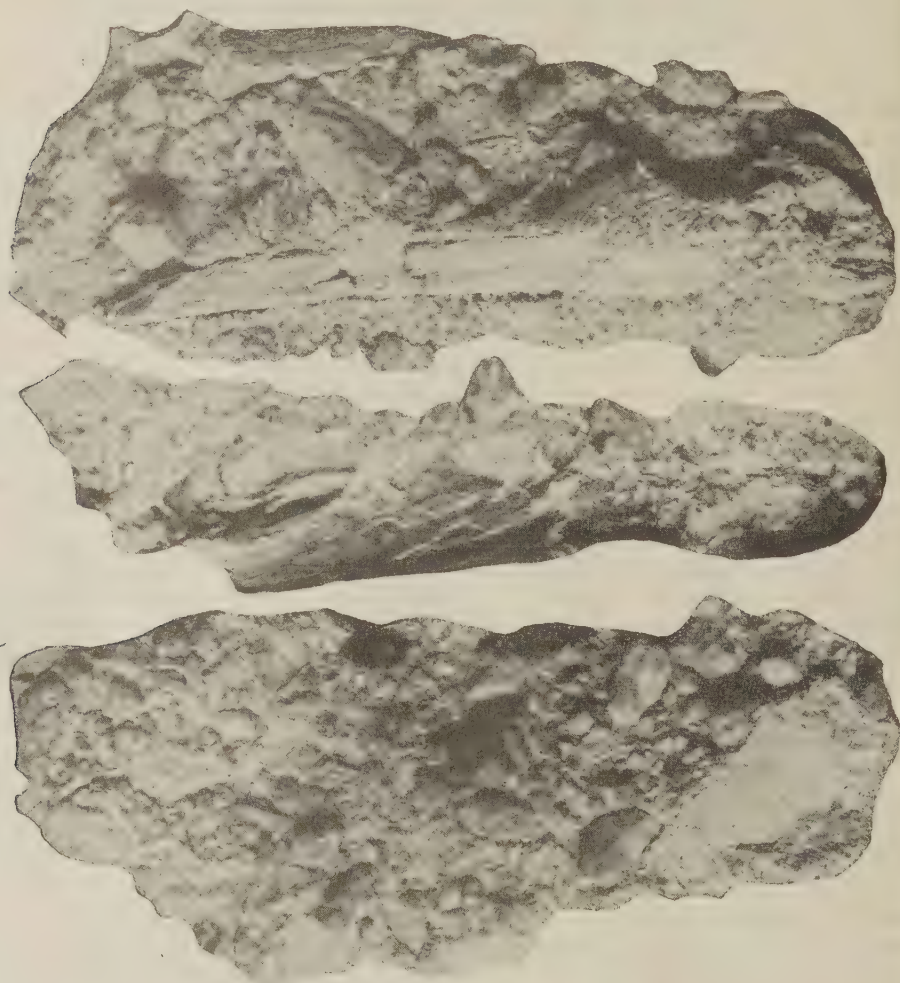


Рис. 1. Костеносная брекчия из Усть-Каменки

Содержащиеся в брекчии ветрогранники имеют различную величину — от 5 до 30 мм, и большинство их относится к подгруппе пирамидальных многогранников (<sup>(1)</sup>, стр. 175) с заостренной вершинкой и неровным основанием; кроме того, в породе имеются неправильные призматические двухгранники и округленные обломки кварца, близкие по форме к двухосным эллипсоидам вращения; гальки в собственном смысле слова, т. е. окатанные водой округленные обломки, в породе отсутствуют, что не дает основания считать ее обычным конгломератом аквального (морского или речного) происхождения.

Положение пирамидальных многогранников, занимаемое ими в породе с одинаковой ориентировкой их острых вершинок в одну сторону, большая свежесть полевых шпатов, отсутствие какой бы то ни было сортировки обломков по крупности и признаков окатывания их водой, наличие известкового цемента и обломков костей наземных млекопитающих при отсутствии остатков морских и пресноводных организмов — все это свидетельствует о

том, что рассматриваемая брекчия является остаточной и образовалась в континентальных условиях в результате субэкральной (педологической) цементации несортированного обломочного материала, возможно перенесенного на близкое расстояние и сгруженного временными потоками, с последующей эоловой обработкой поверхностей выступавших крупных обломков в зоне дефляции.

Это предположение подтверждается тем, что рыхлый не сортированный по крупности щебень, смешанный с разноразмерным аркозовым песком и содержащий крупные (до 10 см) хорошо фасетированные ветрогранники, встречен при бурении артезианских скважин в других пунктах на южном склоне Украинского кристаллического щита, отстоящих на значительное расстояние от Усть-Каменки, в частности близ ст. Лошкарёвка Сталинской ж. д. где щебень с ветрогранниками обнаружен бурением в основании четвертичных суглинков и верхнеплиоценовых красно-бурых и пестрых глин с гипсом, на глубине 8,5 м, затем — около ст. Мировая Сталинской ж. д., в с. Анповка, Томаковского района, где серый грубо-зернистый кварцево-полевошпатовый песок с гравием, щебнем и ветрогранниками встречен на глубине 4,2—6,0 м под желтовато-бурыми плотными песчанистыми суглинками и в других местах.

Кости млекопитающих, заключенные в описываемой брекчии, представляют неокатанные фрагменты диафизов длиной до 24 см и толщиной до 1,5 см, не определяемые до вида и даже до рода, однако они важны в том отношении, что дают возможность судить о геологическом возрасте вмещающей их породы по коллагеновому методу, разработанному И. Г. Пидопличко<sup>(3)</sup>. Произведенное нами по этому методу определение индекса прокаливания для двух фрагментов костей — фрагментов диафиза — дало следующие результаты:

№ обр.	Вес до прокалив.	Вес после прокалив.	Потеря при прокаливании	Индекс прокаливания
1	12595 мг	11502 мг	1093 мг (8,6%)	1052
2	15563 мг	14122 мг	1441 мг (9,2%)	1080
Среднее . . .	14079 мг	12812 мг	1267 мг (8,9%)	1066

На основании приведенных данных геологический возраст трубчатых костей и содержащей их костеносной брекчии с ветрогранниками должен быть датирован плиоценом ((<sup>2</sup>), стр. 36 и 84). Такая датировка хорошо согласуется с наличием прекрасно выраженных пустынного лака и загара, а также типичных ветрогранников и дефляционных текстур на поверхности известняков понтического яруса во многих местах Причерноморской впадины, в частности в окрестностях Одессы, Херсона и Мариуполя, где эти образования неоднократно описывались В. Г. Бондарчуком, Н. И. Криштафовичем, В. И. Крокосом, И. Левинским и автором.

Так как упомянутые ископаемые геологические памятники залегают между понтическим известняком и верхнеплиоценовыми глинами, то наиболее вероятным возрастом их является среднеплиоценовый (киммерийский), соответствующий континентальному перерыву после регрессии понтического озера-моря.

К этому же времени, по всей вероятности, относится образование описанной костеносной брекчии, а также причудливых грибообразных скал («баб») в окрестностях Бахчисарая, карнизов и ниш выдувания, сотов выветривания и других дефляционных текстур на поверхности эоценовых нуммулитовых известняков в пределах второй гряды Крымских гор.

Поступило  
6 XII 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> Н. Н. Карлов, Пробл. физ. геогр., 16 (1951). <sup>2</sup> И. Г. Пидопличко, Новый метод определения геологического возраста ископаемых костей четвертичного гериода, Киев, 1952.

Н. В. ЛОГВИНЕНКО, Г. В. КАРПОВА, К. Г. ШАНДЫБА и Д. П. ШАПОШНИКОВ

К ВОПРОСУ О СТРАТИГРАФИЧЕСКОМ ПОДРАЗДЕЛЕНИИ  
ТАВРИЧЕСКОЙ ФОРМАЦИИ КРЫМА

(Представлено академиком Н. М. Страховым 6 XII 1960)

Толща темно-серых глинистых сланцев (аргиллитов), переслаивающихся с алевролитами и песчаниками в основании Крымских гор, первоначально была отнесена к нижней юре. В начале этого века К. К. Фохт обнаружил в них триасовую фауну и назвал таврическими слоями (<sup>7</sup>). Позже таврические слои стали называть таврической формацией, выделяя в ней две (<sup>1, 4, 5</sup>) или три (<sup>6</sup>) свиты.

В сводной работе «Геологическое строение СССР» таврическая формация именуется таврической серией и подразделяется на две свиты: таврическая свита верхнего триаса и эскиординская свита нижней юры (<sup>2</sup>).

В настоящей статье речь будет идти о таврической свите верхнего триаса.

Проведенные нами исследования (1956—1960 гг.) позволяют подразделить таврическую свиту (главным образом на основании литологических признаков) на ряд толщ (снизу вверх): 1) наиболее древняя часть флишевой формации, представляющая собой многократное переслаивание пачек нормального и алевролит-аргиллитового флиша \*; 2) нормальный флиш с мощными кварцитовидными песчаниками; 3) аргиллитовая толща (нижняя или древняя), состоящая главным образом из аргиллитов, частью флишеидная; 4) песчаниковый или песчаный флиш (в ритмах преобладают песчаники), переслаивающийся с нормальным и алевролит-аргиллитовым флишем; 5) аргиллитовая толща (верхняя или молодая), состоящая главным образом из аргиллитов, частью флишеидная.

1. Наиболее древняя часть флишевой формации представляет собой многократное переслаивание пачек различной мощности (от десятков до сотен метров) нормального (терригенного, примерно с одинаковым соотношением песчаников, алевролитов и аргиллитов) и алевролит-аргиллитового флиша. На различных уровнях в толще встречаются небольшие по мощности пачки аргиллитового флиша (в ритмах преобладают аргиллиты). В нижней части толщи, в русле р. Бодрака (верхнее течение), обнаружено 5—7 горизонтов песчаников мощностью 0,5—0,7 м, пепельно-серого цвета, без видимой слоистости, с плохой сортировкой обломочного материала (см. ниже).

Во втором элементе ритма — аргиллите — часто наблюдаются железисто-карбонатные конкреции и конкреционные прослои.

Толща не содержит фауны и флоры, а только мельчайший растительный детрит.

Древняя часть флишевой формации развита главным образом между первой и второй грядами, от долины р. Бельбека до р. Салгира.

Главное поле развития ее наблюдается в долине р. Бодрака и р. Альмы. Небольшое пятно выходов этой толщи отмечено на южных склонах Демерджи. Сложена она здесь в сравнительно крупные антиклинальные складки северо-западного простирания, часто опрокинутые на юго-запад.

\* Специальное описание типов флиша см. в (<sup>3</sup>).

Общая мощность толщи около 3000 м, как можно судить по непрерывному разрезу от русла р. Бодрак (в его верхнем течении) до русел оврагов, падающих слева в р. Альму выше с. Дровянки (Бешуй).

2. Толща нормального флиша с мощными кварцитовидными песчаниками состоит из пачек нормального и алевролит-аргиллитового флиша, содержащих два-три горизонта мощных (1,5—2,2 м) серых крупнозернистых кварцитовидных песчаников и многочисленные горизонты серых и темно-серых мелко- и среднезернистых песчаников меньшей мощности (0,4—1,2 м). В выветрелом состоянии мощные кварцитовидные песчаники приобретают розоватые оттенки. В кровле песчаников — многочисленные обугленные растительные остатки.

В нижней части толщи, в бассейне р. Альмы, выше с. Дровянки, ниже кварцитовидных песчаников встречена пачка (в несколько десятков метров) так называемых «пепельных» пород. Эти породы представляют собой песчаники и алевролиты в выветрелом состоянии, пепельно-серые без видимой слоистости и с очень плохой сортировкой обломочного материала: песчаники содержат массу алевроитового и глинистого материала, алевролиты — глинистого материала. Нормальные аргиллиты практически отсутствуют. Возможно, они представляют собой отложения мутьевых потоков (?).

Породы не содержат фауны за исключением обломков криноид и раковин пелеципод в крупнозернистом основании мощных кварцитовидных песчаников.

В глинистых породах второго элемента ритма встречаются железисто-карбонатные конкреции и конкреционные прослои.

Мощность толщи 300—400 м. Развита она на юго-восточном побережье, между Алуштой и Судаком, и в Горном Крыму, в бассейне р. Альмы. На юго-западном склоне долины р. Альмы, выше с. Дровянки, наблюдается непрерывный разрез, в котором 1-я толща без перерыва переходит во 2-ю. Границу между ними условно можно провести по первым горизонтам «пепельных» пород.

3. Толща нижняя, или древняя, аргиллитовая. Она сложена в нижней и верхней части алевролит-аргиллитовым флишем, а в средней части флишоидными отложениями, состоящими почти целиком из аргиллитов с редкими и маломощными прослоями алевролитов.

Железисто-карбонатные конкреции и конкреционные прослои наблюдаются довольно часто, отмечено также небольшое количество крупных караваеобразных конкреций (в сплошной толще аргиллитов).

Толща не содержит фауны и флоры, встречается только мельчайший растительный детрит.

Мощность толщи около 250 м. Развита она на юго-восточном побережье, от Судака до Гурзуфа (также в Алушке), и в бассейне р. Альмы. Согласно залегает на 2-й толще, что можно наблюдать в районе с. Рыбачьего. Границу между ними следует проводить выше последнего мощного (1,8—2,0 м) кварцитовидного песчаника, примерно в 70—80 м, где исчезают последние пласты песчаников и развит алевролит-аргиллитовый флиш.

4. Толща песчаникового флиша, переслаивающегося с нормальным и алевролит-аргиллитовым флишем, сложена песчаниковым флишем, образующим пачки мощностью 50—80 м и переслаивающимся с нормальным и алевролит-аргиллитовым флишем. В песчаниковом флише иногда отсутствует второй элемент ритма — аргиллит (благодаря размыву перед отложением первого элемента последующего ритма).

В самой верхней части толщи наблюдается пачка мощностью 20—30 м алевролит-аргиллитового флиша с массой фукоидов — ходов червей илоедов, — это червяковый, или фукоидный, флиш \*.

\* Фукоиды встречаются во всей формации, но в описываемом горизонте наблюдается массовое развитие ходов илоедов, иногда «съедающих» слоистость.

Эта толща обычно имеет четкую ритмичность, которая несколько нарушается только в ритмах, где нет аргиллитов. Фауна отсутствует, но почти все породы содержат мелкий растительный детрит. Пыльца и споры также не обнаружены. Конкрекции и конкреционные прослои встречаются значительно реже.

Развита на юго-восточном побережье — от Судака до Гурзуфа, отмечена в районе Алушки (?), в бассейне р. Альмы, у с. Дровянки и в некоторых других местах.

Мощность толщи 200—250 м. Залагает она с угловым несогласием на нижележащей. Это несогласие можно наблюдать в районе с. Рыбачьего. У с. Дровянки она залагает на 3-й толще без видимого несогласия (?).

5. Толща верхняя, или молодая, аргиллитовая. Она сложена в нижней части алевролит-аргиллитовым флишем, в средней части флишистыми аргиллитовыми отложениями. Среди аргиллитов толщи широко развиты аргиллиты со щеповидной отдельностью и аргиллиты

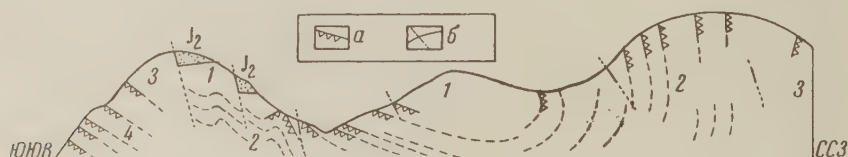


Рис. 1. Схема геологического строения района с. Рыбачьего. *a* — положение гиевроглифов, *b* — линии разрывов. 1 — верхняя аргиллитовая толща, 2 — толща песчанового флиша с нормальным и другими типами флиша, 3 — нижняя аргиллитовая толща, 4 — толща нормального флиша с кварцитовидными песчаниками

со скорлуповатой отдельностью. Последние напоминают среднеюрские аргиллиты. В аргиллитах встречаются крупные (до 0,5 м) караваеобразные конкреции, мелкие конкреции и конкреционные прослои железистых карбонатов, типа (Fe, Ca, Mg, Mn) (CO<sub>3</sub>).

В верхней части эта толща вновь приобретает более или менее четкую ритмичность, появляются прослои алевролитов и серых мелкозернистых песчаников, часто с карбонатным цементом. Алевролиты и аргиллиты, а также крупные карбонатные конкреции содержат обугленные растительные остатки.

При общей мощности толщи 300—400 м на среднюю флишистую часть приходится более половины разреза. Развита она на юго-восточном побережье от Судака до Гурзуфа, на южном берегу от Гурзуфа до м. Сарыч и Ласпи, а также в верховье р. Качи, на рр. Альме и Салгире.

В нижней флишевой и средней флишистой части толщи во многих пунктах Крыма (у с. Рыбачьего, между Рыбачьим и Приветным) обнаружена фауна галобий: *Halobia septentrionalis* Smith., *Halobia superba* Mojs. и др., что по мнению Л. Д. Кипарисовой соответствует карнийскому ярусу верхнего триаса.

В верхней ритмичной части толщи во многих пунктах Крыма (р. Салгир, у сс. Петропавловки и Курцы; р. Альма у с. Саблы; м. Форос, м. Сарыч, Мухолатка, Мшатка, Кучук-Кой, Куру-Узень, в буровой скважине у Старого Крыма, в Янышарской бухте) обнаружена фауна монотисов и реже монотисов и галобий (в алевролитистых аргиллитах и алевролитах): *Monotis caucasica* Witt., *M. salinaria* Bron., *M. tenuicostata* Kittl., *Halobia neumayri* Bitt., *H. austriaca* Mojs. и др. — что отвечает норийскому ярусу верхнего триаса.

Залагает согласно с 4-й толщей, что можно наблюдать в районе с. Рыбачьего, г. Алушты и в других местах. На юго-восточном и южном берегу Крыма таврическая свита сложена в мелкие, сильно сжатые складки северо-восточного простирания (субширотного до широтного в районе заповедни-

, опрокинутые на юго-восток (юг). 5-я толща слагает ядра синклиналь-  
х складок (рис. 1).

Эскиординская свита (лейасовая), а по А. И. Шалимову — и среднеюр-  
ая <sup>(8)</sup> залегает на северном склоне Крымских гор с угловым и эрозийным  
согласием на различных горизонтах таврической свиты. Однако благода-  
р хорошей обнаженности в долине р. Салгира, р. Бодрака и в других местах,  
она описана, соотношения между этими свитами, к сожалению, остаются  
достаточно ясными. Еще менее ясно положение эскиординской свиты на  
жнем берегу Крыма (?).

Таким образом, таврическая свита в описанном нами объеме имеет ог-  
ромную мощность, порядка 4500—5000 м.

Достоверно установлен возраст только ее самой верхней части мощно-  
стью 300—400 м. Нижележащие толщи, возможно, относятся частью еще  
верхнему триасу, а большей частью — к среднему триасу (может быть, и  
верхам нижнего триаса?).

При таком положении именовать ее свитой невозможно. Вероятно, сле-  
дует именовать ее серией, в пределах которой со временем можно будет вы-  
делить ряд самостоятельных свит.

Харьковский государственный университет  
им. А. М. Горького

Поступило  
3 XII 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> Б. П. Бархатов, Вестн. ЛГУ, № 7 (1955). <sup>2</sup> Геологическое строение СССР,  
Стратиграфия, 1958. <sup>3</sup> Н. В. Логвиненко, Г. В. Карпова, К. Г. Шан-  
ыба, Д. П. Шапошников, ДАН, 121, № 3 (1958). <sup>4</sup> А. С. Моисеев,  
Изв. Всесоюз. геол.-разв. объедин., 51, в. 39 (1932). <sup>5</sup> А. С. Моисеев, ДАН, 23,  
№ 8 (1939). <sup>6</sup> М. В. Муратов, Изв. Высш. учебн. зав., Геол. и разв., № 11 (1959).  
К. К. Фохт, Тр. СПб общ. естествоисп., 32, в. 1 (1901). <sup>8</sup> А. И. Шалимов  
АН, 132, № 6 (1960).

С. С. ЭЛЛЕРН и В. М. ВИНОКУРОВ

## О ПРОСЛОЯХ ТУФФИТОВЫХ ПОРОД В ЖИВЕТСКИХ ОТЛОЖЕНИЯХ НА ЮГЕ ТАТАРИИ

(Представлено академиком Н. М. Страховым 12 VIII 1960)

Изучение с помощью скважин глубинной геологии территории Камско-Волжского края позволило выявить ряд новых особенностей его строения, в частности наличие в основании осадочной толщи среди отложений бавлинской свиты и девонской системы субвулканогенных и вулканогенных образований.

Л. М. Миропольский<sup>(5)</sup>, анализируя эти проявления магматизма и тектогенеза, считает возможным выделить по крайней мере две фазы вулканизма: нижнекембрийскую (граница верхнего протерозоя и нижнего кембрия) и пашийскую, связанную с концом времени отложения пашийской свиты. При этом автор допускает, что нижнекембрийская фаза вулканизма протекала в несколько этапов, каждый из которых, быть может, представляет собою самостоятельную фазу.

Новые материалы позволяют сделать подобное допущение и для пашийской или, лучше сказать, девонской фазы вулканизма. Исследованиями Н. А. Михайловой<sup>(6)</sup> установлено наличие прослоев пепловых туфов в живетских, кыновских и саргаевских слоях. М. Ф. Филипповой и С. М. Ароновой<sup>(9)</sup> описаны мелкие обломки эффузивных пород (до 0,15 мм) в составе условно выделенного ими верхнефранского подъяруса в Мелекесе. Все это указывает на неоднократное проявление процессов вулканизма в период формирования девонских отложений рассматриваемой территории.

При исследовании терригенных девонских отложений южной части Татарии в пределах так называемой Нурлатской разведочной площади одним из авторов данного сообщения в скважинах №№ 15, 16 и 48 (см. рис. 1) в отложениях среднего девона были подмечены своеобразные песчаные и глинистые породы зеленовато-серого цвета. Детальное изучение песчаных пород показало, что они являются типичными туффитами. Последние состоят из зерен эпилитов и пирокластического материала мелкозернистой размерности (0,3—0,1 мм). Нормально-осадочный материал представлен в основном угловато-окатанными и полуокатанными обломками кварца и реже — плагиоклазов, ортоклаза и микроклина; в качестве аксессуаров (по данным иммерсионных определений тяжелых и легких фракций) отмечаются гранат, циркон, мусковит, магнетит, хлорит, пироксены. Зерна кварца чаще всего полуокатаны. Угловато-окатанные обломки полевых шпатов обычно каолинизированы.

Пирокластическая часть породы представлена желто-бурыми осколками вулканического стекла (очевидно, основного состава) и пепловым материалом. Осколки стекла обычно самых причудливых очертаний, «пузырчатые» частично окатанные. Стекло часто обнаруживает явления раскристаллизации и последующие изменения — хлоритизацию, карбонатизацию, образование рудной сыпи (магнетит), цеолитизацию и др.

Эпикластические обломки и осколки вулканического стекла цементируются светло-бурой массой. Последняя иногда представляет собой почти неизмененную стекловатую массу; чаще же всего она раскристаллизована, и в этом случае представлена микрокристалликами альбита, хлорита, сери-

ита и магнетита. Среди основной массы нередко наблюдаются измененные органические остатки.

По цементу в результате последующих процессов развиваются хлориты, еолиты, карбонаты, опал и пирит, образующие в некоторых случаях сферолитовые, псевдоолитовые и другие текстуры.

С целью выявления количественного соотношения эпикластического и ирокластического материалов порода была дезинтегрирована кипячением 10% HCl с последующим растиранием. Если принять во внимание микроскопические наблюдения, свидетельствующие о том, что пирокластическая часть породы главным образом представлена пепловым материалом, который растисался до частичек менее 0,01 мм, то на долю последних, по данным гранулометрического анализа, приходится около 10% по весу. Полученная таким образом пелитовая фракция, предварительно обработанная концентрированной перекисью водорода, была подвергнута термическому анализу и показала присутствие каолинита (эндотермический эффект при 590° и экзотермический — при 1010°).

Глинистые породы имеют зеленовато-серый цвет, плотные, непластичные; участками обогащены алевроитовым материалом, содержат отпечатки органических остатков.

Микроскопическое изучение показало, что эти породы (аргиллиты) состоят из светло-бурой массы, слабо действующей на поляризованный свет. В основной массе иногда наблюдаются участки с незначительной по количеству (около 5%) примесью кластического материала, представленного преимущественно зернами кварца размером порядка 0,1 мм. Светло-бурая основная масса представляет собой измененный пепловый материал, раскристаллизованный до агрегата, состоящего из смеси микрозернистых альбита, серицита, хлорита, карбонатов с примесью гидроокислов железа и пелитовых частичек.

Термический анализ валового состава аргиллита, предварительно обработанного концентрированной перекисью водорода, показал присутствие каолинита (эндотермический эффект при 590° и экзотермический — при 980°) и хлорита (экзотермический эффект при 310°). Как в песчаниковых, так и в глинистых туффитовых породах содержатся остатки фауны (конодонты).

Стратиграфическое положение изученных туффитовых пород достаточно ясно, так как располагаются они непосредственно над характерной для территории Татарии и смежных районов карбонатной пачкой так называемого «среднего известняка» и перекрываются всегда аргиллитами, обычно лежащими сразу над «средним известняком» (8). Любопытно, что в отдельных случаях в прослоях песчаниковых туффитов отмечены крупные обломки (неправильной формы, до 10 см длиной) этих подстилающих известняков (скважина № 15).

Существенно отметить также, что в скважинах, где отмечены прослои туффитовых пород, наблюдается аномально повышенная мощность «среднего известняка» (до 5—7 м вместо обычных 1—3 м). Внимательное изучение этих карбонатных пород показало, что они представлены, как правило, органогенными разностями, содержащими большое количество обломков (шламм и детрит) и цельных остатков скелетов фауны. Среди этих остатков,

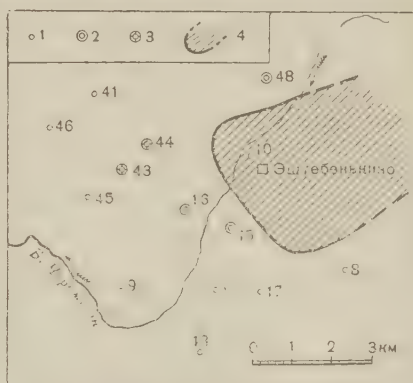


Рис. 1. Район исследования. 1 — скважины Нурлатской площади; 2 — разрезы, в которых выявлены туффитовые породы и биогермные известняки; 3 — разрезы, вскрывшие биогермные известняки; 4 — предполагаемые границы Нурлатского (Эштебенькинского) выстupa

по данным Ф. Я. Курбанова, преобладающими являются строматопоры кораллы (ругоза и табулята) и остракоды. Характерно также то, что по верхность напластования пород карбонатной пачки неправильная, бугристая, с примазками темного глинистого вещества. Часто известняки от обилия содержащихся в них остатков фауны приобретают как бы брекчиевидный характер.

Все эти признаки указывают, видимо, на наличие в районе указанных скажин Нурлатской площади небольшого по размерам биогерма (4). Интересно также и то, что биогерм этот имел, очевидно, характер берегового рифа, который непосредственно примыкал к выступу древних кристаллических пород, так как несколько восточнее тех разрезов, в которых зафиксированы биогермные породы и развитые над ними туффитовые породы, бурением вскрыты разрезы, где полностью отсутствуют отложения старооскольского горизонта среднего девона, включающие «средний известняк» и туффитовые породы. Этот участок получил название Нурлатского или Эштебенькинского выступа (11). Слагается выступ габбро-неритами, достаточно широко развитыми в этом районе (10). Обращает на себя внимание еще один факт: прослой туффитовых пород, которые отмечены в разрезах, как бы по кольцом окружают указанный выступ фундамента.

Приведенные данные, на наш взгляд, свидетельствуют о своеобразных условиях вулканической деятельности в рассматриваемом районе. Не исключено, что извержение сопровождалось слабым направленным взрывом. Об этом в известной мере свидетельствуют наблюдающиеся в туффитовых прослоях обломки подстилающих известняков. Характерно и отсутствие самой лавы, что, видимо, объясняется, с одной стороны, первоначально малым ее количеством, а с другой — энергичными процессами ее разрушения и последующего переотложения в морских мелководных условиях. Этот процесс разрушения был довольно продолжительным, что доказывается тем, что Нурлатский выступ стал областью осадконакопления только с конца живетского века, а в наиболее возвышенной части — с начала верхнего девона. Обилие каолинистового материала в туффитовых породах свидетельствует об энергичных процессах формирования коры выветривания каолинистового состава на выступе и одновременно о ее постоянном разрушении и сносе в прилегающий водоем.

История формирования нурлатских туффитовых пород была связана с определенными геологическими условиями района. В досреднедевонское время здесь возник выступ, связанный, видимо, с резко расчлененной поверхностью, сложенной древними магматическими и метаморфическими породами. Этот выступ являлся благоприятным участком для развития биогермных построек. Рост последних здесь продолжался почти до конца среднего девона. Затем в краевой зоне выступа, где, по-видимому, еще в досреднедевонское время намetilась зона ослабления, произошло вулканическое извержение. Это привело к замедлению и прекращению процесса рифообразования и последующему перекрытию биогермных тел продуктами вулканизма.

В заключение отметим, что Нурлатский вулканический район находит свое определенное место в закономерном ряду вулкаников Казанско-Сергиевской впадины (7).

Казанский государственный университет  
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило  
11 VIII 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- 1 Г. С. Горшков, Проблемы вулканизма, Матер. к первому Всесоюз. совещ., Ереван, 1959. 2 Л. З. Егорова, Тр. ВНИГРИ, в. 22 (1959). 3 К. И. Ломоть, ДАН, 94, № 4 (1954). 4 В. П. Маслов, Тр. Инст. геол. наук АН СССР, в. 118, геол. сер., № 42 (1950). 5 Л. М. Миропольский, Изв. Казанск. фил. АН СССР, сер. геол., № 7 (1957). 6 Н. А. Михайлова, ДАН, 120, № 2 (1958). 7 А. С. Новикова, Изв. АН СССР, сер. геол., № 10 (1959). 8 В. И. Тихий, Тр. ВНИГРИ, в. 106 (1957). 9 М. Ф. Филиппова, Тр. ВНИГРИ, в. 13 (1958). 10 В. П. Флоренский и др., Тр. Московск. инст. нефтехимии и газовой пром. им. Н. М. Губкина, в. 25, 3 (1959). 11 И. А. Шпильман, Татарская нефть, № 8 (1957).

И. М. КИСИН и И. Н. СТЕПАНОВ

# О СОДЕРЖАНИИ ТВЕРДЫХ МИНЕРАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ В ЛЕДНИКАХ КАВКАЗА

(Представлено академиком Н. М. Страховым 6 XII 1960)

В ледниковой толще глетчеров содержится значительное количество твердых минеральных частиц. По определению А. Г. Бетехтина (1), лед является горной породой, которая состоит из замерзшей воды, газа и рассеянных во льду минеральных зерен.

Несмотря на большое содержание минеральных частиц в ледниках, количественный и качественный состав их до настоящего времени почти не изучен, хотя подробные сведения представили бы научный и практический интерес. Так, многие исследователи связывают образование покровных лёссовидных суглинков с вытаиванием мелкоземистого материала из ледника. Кроме того, водно-ледниковые наносы являются основными источниками твердого стока в реках ледникового питания.

Изучение геохимических свойств льда проводилось нами летом 1960 г. на ледниках Южный и Юго-восточный вершины Адала-Шухгель-меэр (4152 м) Богосского хребта и Тихицар и Муркар вершины Базар-дюзи (4486 м) Главного Кавказского хребта.

Образцы льда брались на различных участках ледников из естественных сколов и обрывов льда, а также из трещин. После взвешивания и определения плотности льда образцы выпаривались, а оставшийся твердый осадок высушивался до воздушно-сухого состояния и взвешивался на аналитических весах. Затем при помощи сита мелкозем (диаметр частиц  $\leq 1$  мм) отделялся от более крупных частиц.

Таблица 1

Содержание твердых минеральных частиц в ледниках

Дата взятия образца	№ образ- ца	Место взятия образца	Вес образ- ца, кг	Плотность льда в об- разце г/см³	Вес твердого остатка, г		Содержание мелкозема, г/м³		
					общий	мелко- зема	льда	воды	
Богосский хребет, вершина Адала-Шухгель-меэр (4152 м), ледник Южный									
7 VI	1	Конец языка	9,0	0,90	9,37	5,20	520	578	
	2	Конец языка	5,1	0,91	8,72	3,46	617	678	
	3	200 м выше конца языка	3,0	0,90	4,00	1,66	498	553	
10 VII	4	700 м выше конца языка	4,2	0,90	4,40	2,48	531	590	
	5	Фирновый бассейн	4,0	0,89	3,20	1,68	374	415	
Главный Кавказский хребет, вершина Базар-дюзи (4486 м), ледник Муркар									
14 VIII	1	Конец языка	3,0	0,91	5,36	2,22	673	740	
	2	300 м от конца языка	2,4	0,90	4,50	1,78	668	742	
Главный Кавказский хребет, вершина Базар-дюзи (4486 м), ледник Тихицар									
15 VIII	1	Конец языка	2,6	0,90	2,95	1,47	509	565	
	2	200 м от конца языка	1,8	0,90	1,66	0,90	450	500	

Как видно из табл. 1, содержание мелкозема в леднике колеблется от 374 до 673 г на 1 м<sup>3</sup> льда. Наибольшее содержание мелкозема отмечается в теле ледника Муркар, наименьшее — в образце, взятом в фирновой области ледника Южный.

Если 500 г принять за среднюю величину содержания мелкозема в 1 м<sup>3</sup> льда ледника Южный, то в целом в его ледниковой массе объемом 75 млн м<sup>3</sup> (площадь 1,5 км<sup>2</sup> и средняя мощность 50 м) содержится примерно 37500 т мелкозема.

В период интенсивной абляции (июль — август) за 1 сутки с поверхности ледника Южный стает в среднем около 4 см слоя льда, что при площади ледника 1,5 км<sup>2</sup> составляет 60 000 м<sup>3</sup> льда. Следовательно, из ледниковой толщи сбрасывается в сутки 30 т мелкозема, что составляет 28% объема твердого стока р. Кила, берущей начало из грота ледника Южный.

Мелкозем, выпаренный из толщи ледника Южный, а также взятый с выветренной поверхности скальных выступов альпийского пояса Богосского хребта и с поверхности снежников и ледника, был подвергнут механическому анализу методом пипетки с обработкой образцов по способу Н. А. Качинского (табл. 2).

Таблица 2

Механический состав мелкозема

Место взятия образца	Содержание частиц в весовых процентах к абсолютно сухой навеске						сумма фракций	
	1—0,25 мм	0,25—0,05 мм	0,05—0,01 мм	0,01—0,005 мм	0,005—0,001 мм	<0,001 мм	<0,01 мм	>0,01 мм
Продукты выветривания скальных выступов, абс. выс. 3200 м	35,6	42,1	8,9	5,8	1,3	6,3	13,4	86,6
Мелкозем, выпаренный с поверхностного слоя снежников, абс. выс. 3200 м	47,5	32,7	10,8	0,3	4,8	3,9	9,0	91,0
Мелкозем, взятый с поверхности ледника Южный, абс. выс. 3100 м	46,3	31,5	15,2	1,8	3,2	2,0	7,0	93,0
Мелкозем, выпаренный из толщи ледника Южный, конец языка, абс. выс. 3000 м	2,1	72,2	18,9	2,0	2,6	2,2	6,8	93,2
Мелкозем, выпаренный из толщи ледника Южный, в 200 м выше конца языка, абс. выс. 3050 м	1,4	67,3	20,7	2,6	5,2	2,8	10,6	89,4

Как видно из табл. 2, мелкозем, выпаренный из толщи ледника, имеет повышенное содержание фракций мелкого песка (0,25—0,05 мм) по сравнению с мелкоземом, взятым с поверхностей скальных выступов, снежников и ледников. Преобладание фракций мелкого песка, по-видимому, связано с разрушением в толще ледника более крупных минеральных зерен (фракций 1—0,25 мм и более). Изменения механического состава в пределах пылеватой и илистой фракций незначительны.

Микроскопическое исследование мелкозема ледниковой толщи показало, что песчинки имеют слабоокруглую форму. На поверхности зерен видны неясные тонкие штрихи.

Твердые частицы диаметром 1—10 мм в основном представлены угловатыми обломками аспидных сланцев, редко слабоокатанных.

В лабораторных условиях были исследованы гидрохимические свойства льда ледника Южный. В целом в весьма пресных водах ледника, однако, заметно явное преобладание гидрокарбонатного иона  $\text{HCO}_3^{2-}$  и натрия с калием. Реакция — слабощелочная до нейтральной.

Таблица 3

Содержание и вынос химических элементов из ледниковой толщи ледника Южный

	Содержание в ледников. массе			Вынос за сут- ки, т		Содержание в ледников. массе			Вынос за сут- ки, т
	г/л	г на 1 м <sup>3</sup> льда	т			г/л	г на 1 м <sup>3</sup> льда	т	
Натрий с калием	0,011	9,9	742,5	0,60	Гидрокарбонаты	0,030	27,0	1925,0	1,62
Сульфаты	0,004	3,6	270,0	0,19	Кальций	0,003	2,7	192,5	0,16
Хлориды	0,006	5,4	405,0	0,32	Магний	0,010	9,0	675,0	0,54

Как видно из табл. 3, количество растворимых солей в ледниках достигает значительных величин, и, по-видимому, они активно участвуют в геологическом круговороте веществ и в водно-солевом балансе суши.

Управление гидрометслужбы  
АзербССР

Поступило  
3 XII 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> А. Г. Бетехтин, Курс минералогии, М., 1956.

У. Г. ДИСТАНОВ

## О СОСТАВЕ ГЛИНИСТОГО МАТЕРИАЛА ПАЛЕОГЕНОВЫХ ОПОК СРЕДНЕГО ПОВОЛЖЬЯ

(Представлено академиком Н. М. Страховым 6 XII 1960)

Среди палеогеновых отложений Среднего Поволжья опоки имеют широкое развитие. В сложении нижней части разреза (нижнесызранской свиты) им принадлежит ведущее место, мощность их достигает 60—80 м и более.

Это легкие тонкопористые кремнистые породы, характеризующиеся довольно широким диапазоном морфологических особенностей. Среди них можно выделить опоки серые и темно-серые, с землистым и полураковистым изломом (нормальные); опоки темно-серые и черные, окремненные, с раковистым изломом (наиболее крепкие); опоки светлые, от почти белых до светло-серых, желтых тонов, мягкие, с землистым изломом. Последние образовались за счет выветривания опок двух первых разновидностей. При этом происходило окисление органического материала и частичный вынос аморфного кремнезема.

Сложены опоки (не считая примеси песчано-алевритового материала) двумя основными компонентами — опаловым кремнеземом и глинистым материалом. Первый из них обычно преобладает в породе. Представлен он рентгеноаморфным опалом и  $\alpha$ -кристобалитом <sup>(1)</sup>. Последний присутствует в количестве 25—30%, в глинистых разностях (в том числе в опоках выветрелых); содержание его достигает 50% и более. Увеличение глинистого материала в толще нижнесызранских отложений в целом происходит в юго-восточном направлении, опоки переходят здесь в ряде случаев, по существу, в глины кремнистые (Михайловск, Новоузенск и др.).

Свойства опок (активность, адсорбционная способность и т. п.) определяются, в основном, составом и количеством опалового кремнезема. Известную роль при этом несомненно играет и глинистая составляющая. Поэтому при качественной оценке опок (что нужно и при определении генезиса их) наряду с характеристикой кремнезема необходимо знать состав глинистого материала.

Ниже приводятся результаты исследования минерального состава глинистых фракций, выделенных из различных типов опок Среднего Поволжья. При изучении вещественного состава, наряду с обычными методами исследований, были использованы данные рентгеноструктурных, термических и электронномикроскопических анализов. Выделение глинистых фракций производилось после растворения опок в 10% NaOH (удаления свободного SiO<sub>2</sub>).

Пределы колебаний содержания отдельных компонентов глинистых фракций (в процентах на сухую массу), выделенных из различных опок, следующие: SiO<sub>2</sub> 43,42—58,47; Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> 13,82—26,52; Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> 5,09—9,29; CaO 0,37—4,60; MgO 2,68—4,76; K<sub>2</sub>O 1,77—4,06; Na<sub>2</sub>O 0,82—2,16; п. п. п. 6,14—15,32. Эти данные могут дать лишь некоторое представление о минеральном составе глинистых фракций. Установленные пределы содержания глинозема (13,8—26,5%) отмечаются обычно у глин монтмориллонитового (низшие значения) и гидрослюдистого типа. Сравнительно высокое присутствие щелочей, особенно K<sub>2</sub>O, может свидетельствовать о гидрослюдистом составе.

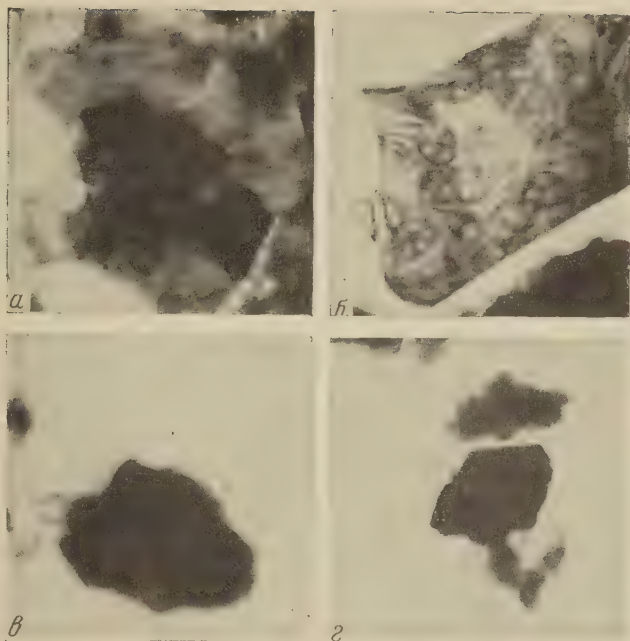


Рис. 1. Электронномикроскопические снимки глинистых минералов палеогеновых опок. 11500  $\times$ . 1 — Кивать, образец № 1, гидрослюда; 2 — Б. Лопуховка, № 5, гидрослюда; 3 — Новоузенск, № 9, монтмориллонит; 4 — Жемковка, № 4, каолинит с гидрослюдой

Вм  
отн  
дер  
ран  
пы  
ВО  
42  
19  
Д  
аги  
ва  
(Г  
В  
зе  
не  
нн  
лн  
нн  
лн  
нн  
б  
0  
н  
В  
л  
л  
р  
с  
о  
г  
н  
в

Зместве с тем, ряд образцов (Б. Лопуховка, Головино и др.) характеризуется относительно более высоким содержанием MgO и CaO при преобладании первого. Повышенное присутствие глинозема и щелочей обычно более характерно для глинистых фракций, выделенных из опок светлых, выветрелых.

Исследование показателей преломления глинистых минералов производилось при увеличении 1000—1400 ×. Поскольку малые размеры изучаемых зерен затрудняли определение и точных оптических констант, выявлялись лишь крайние значения показателей преломления групп минералов. Установлено, что основным компонентом глинистых фракций являются гидрослюда. Показатели преломления их лежат, в одних случаях, в интервале 1,55—1,56, в других — до 1,58. В пределах 5—10%, иногда и более (Кр. Сосна — до 40%, Кондарац — до 20—30%), присутствует глауконит. В опоках серых, «нормальных» и глинистых отмечаются нередко единичные зерна с показателем преломления, соответствующим монтмориллониту; некоторые образцы (Воскресенское, Новоузенск) характеризуются повышенным его содержанием (до 20—25%). Иногда, преимущественно в опоках светлых, выветрелых, устанавливается присутствие пластинчатых, более крупных, чем основная масса, зерен с показателем преломления в пределах 1,56—1,57, являющихся, возможно, каолинитом. До 10% (нередко больше) наблюдаются зерна кварца, концентрирующиеся обычно во фракции 0,01—0,005 мм, и сохранившиеся от растворения остатки створок диатомей.

Электронномикроскопические исследования подтверждают, что основным компонентом глинистых фракций опок являются гидрослюда (рис. 1). В одних случаях это ясно выраженные довольно крупные (до 0,005—0,01 мм) пластинчатые зерна с резкими очертаниями, в других — более мелкие (до 1 мк) чешуйки, иногда со слабо размытыми очертаниями. В некоторых образцах (Воскресенское, Новоузенск) отмечается также значительное присутствие зерен монтмориллонита, обычно непрозрачных, с распылчатыми очертаниями. Встречаются удлиненные, слабо прозрачные чешуйки и агрегаты глауконита (Кр. Сосна и др.). В виду примеси наблюдаются непрозрачные, с резкими очертаниями изометричные зерна кварца. В опоках светлых, выветрелых встречаются в виде единичных зерен обычно плохо окристаллизованные непрозрачные листочки каолинита.

Таблица 1\*

№№ п. п.	Кивать обн. 2б, обр. № 1		Головино обн. 4б, обр. № 2		Новоузенск скв. № 1, обр. № 9		№№ п. п.	Кивать обн. 2б, обр. № 1		Головино обн. 4б, обр. № 2		Новоузенск скв. № 1, обр. № 9	
	I	d <sub>α</sub> , кХ	I	d <sub>α</sub> , кХ	I	d <sub>α</sub> , кХ		I	d <sub>α</sub> , кХ	I	d <sub>α</sub> , кХ	I	d <sub>α</sub> , кХ
1					3	14,8	12	2	1,810				
2	4	10,1	8	9,487	2р	10,2	13	2	1,714	5	1,694	1	1,703
3	2	5,02	3	4,839	3	4,97	14	6ш	1,648	6р	(1,637)	2	1,652
4	10	4,45	5	4,427	10	4,44	15			1	1,530		
5			2р	(3,618)	1	3,67	16	8р	1,498	8	1,492	9р	1,495
6	4	3,35	7	3,286	6	3,34	17			1р	(1,415)		
7	2	2,849	4р	(2,801)	2	2,83	18	2	1,377				
8	9	2,558	10	2,547	9	2,57	19			1р	1,359	2	1,373
9	2	2,386	5р	2,344	3р	2,39	20			1р	1,333		
10			3	2,076			21	5	1,293	3р	1,290		
11	3	1,977	2р	(1,201)	1р	1,996	22	3	1,291	3р	1,238		

\* Эталонь взяты по И. В. Иогансен.

Рентгенографические исследования также свидетельствуют о том, что основным компонентом глинистых фракций всех образцов является гидрослюда (наиболее характерные рентгенограммы приведены в табл. 1). Диагностической для нее является линия с  $d \approx 10,0$  кХ. При съемке образцов, насыщенных этилен-гликолем, смещения этой линии в сторону больших межплоскостных расстояний не наблюдается. В некоторых образцах (Воскресенское, Новоузенск) глинистая составляющая наряду с гидрослюдой содержит монтмориллонит. На присутствие его указывает линия

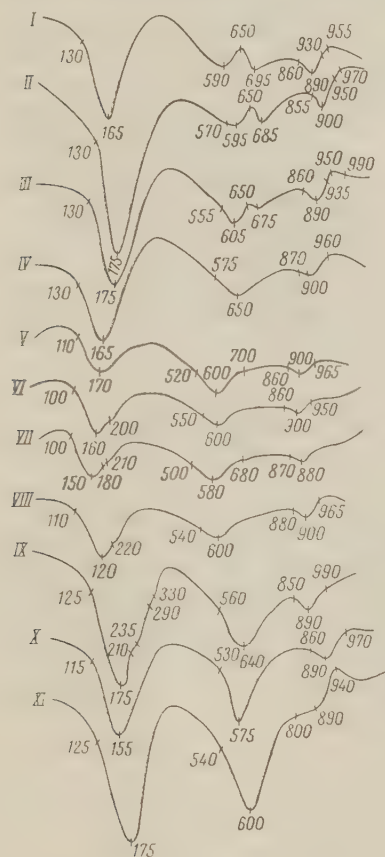


Рис. 2. Дифференциальные кривые нагревания глинистых фракций палеогеновых опок. I — Кондарац, образец № 2; II — Павловка, № 5; III — Б. Лопуховка, № 5; IV — Кр. Сосна, № 4; V — Ляховка, № 6; VI — Новоузенск (скв. № 1), № 23; VII — Воскресенское, № 5; VIII — Сестренки, № 9; IX — Покровка, № 8; X — Б. Станичное, № 8; XI — Жемковка, № 4

эндотермическим эффектом при 860—900° и экзотермическим — при 955—970°. Кривые мало характерны для гидрослюд, они имеют большее сходство с кривыми нагревания монтмориллонита. Оптическими и рентгенографическими исследованиями определяется, что основным минералом в этих образцах является гидрослюда. Монтмориллонит обнаруживается в виде небольшой примеси, и лишь в образце из Б. Лопуховки содержание его устанавливается до 10—15%. Эта, сравнительно небольшая, примесь вряд ли могла оказать существенное влияние на резкое изменение характера кривых

$d = 14,8—14,4$  кХ. После насыщения этилен-гликолем происходит смещение этой линии в область 17 кХ. В большинстве образцов отмечается присутствие грубодисперсного кварца (линии №№ 5, 6, 12, 15, 17 и др.).

Анализ наиболее характерных термических кривых глинистых фракций разных опок свидетельствует о существовании различий в составе их глинистой части. Намечается три типа кривых (рис. 2).

Первый тип кривых (IV—VIII) наблюдается у опок серых и темно-серых, в том числе окремнелых и глинистых. Кривые характеризуются хорошо выраженным эндотермическим эффектом при 115—170° (у некоторых образцов двойным, с дополнительной ступенькой в интервале 220—240°), ясно выраженным эффектом дегидратации с максимумом от 580 до 650° и иногда с очень слабым дополнительным пиком при 680—700°, третьим эффектом при 860—900° и экзотермическим — с максимумами при 950—965°.

Кривые нагревания более характерны для гидрослюд. Наличие у ряда образцов дополнительной остановки первого эндотермического эффекта и слабо выраженного второго пика эффекта дегидратации может быть объяснено присутствием монтмориллонита. Рентгенографическими и оптическими исследованиями в некоторых образцах устанавливается довольно значительное его содержание (до 20—25%).

Второй тип кривых (I—III) отмечается у опок серых, «нормальных». Характеризуется он резко выраженным первым эндотермическим эффектом в интервале 130—175°, хорошо выраженным двойным эндотермическим эффектом с максимумами при 590—605 и 675—695°, третьим

нагревания основного компонента — гидрослюды. Может быть в данном случае в значительном количестве присутствуют необычные гидрослюды, гидрослюды со смешанными слоями монтмориллонита. В работах Р. Е. Грима, М. Ф. Викуловой и др. (<sup>2-4</sup>) отмечается, что глинистые минералы в процессе преобразования могут иметь через стадии смешанно-слоистых минералов различные переходы (особенно между монтмориллонитами и гидрослюдами). Кривые нагревания таких смешанно-слоистых минералов несут в себе черты обоих компонентов.

Третий тип кривых (IX—XI) встречается у опок светлых, выветрелых. Примечательными являются резкие эндотермические эффекты (особенно в интервале 530—640°) и обычно более отчетливый, чем в предыдущих образцах, экзотермический эффект при 940—970°. Последнее может быть связано с наличием в некоторых образцах помимо основного компонента — гидрослюды также небольшой примеси каолинита. Электронномикроскопическими исследованиями в этих опоках устанавливаются единичные зерна каолинита, химические анализы показывают в ряде случаев повышенное присутствие  $Al_2O_3$  (26,4%, Кивать, образец № 1).

Таким образом, данные термических анализов также подтверждают, что основным компонентом глинистой части опок являются гидрослюды. В отдельных образцах в значительном количестве присутствует монтмориллонит, в опоках выветрелых — иногда небольшая примесь каолинита.

Следует отметить, что существенное присутствие монтмориллонита отмечается обычно у опок серых, «нормальных» и глинистых, менее других подвергнутых процессам вторичных изменений, а примесь каолинита — в опоках светлых, выветрелых. Видимо, в первоначальном осадке наряду с гидрослюдистыми минералами в значительном количестве присутствовал и монтмориллонит. В дальнейшем, в процессе преобразования осадка, произошло изменение последнего (иногда частичное) в гидрослуду, с образованием в отдельных случаях промежуточных смешанно-слоистых минералов — гидрослюды со смешанными слоями монтмориллонита. Процессы выветривания опок наложили свой отпечаток на состав глинистой части — привели к частичной каолинизации гидрослюды.

Автор выражает признательность В. К. Аментовой, В. В. Власову, В. К. Толмачевой и В. С. Верхунову, выполнившим, химические, рентгеноструктурные, термические и электронномикроскопические анализы.

Геологический институт  
Казанского филиала Академии наук СССР

Поступило  
25 IX 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> В. В. Власов, У. Г. Дистанов и др., ДАН, 128, № 6 (1959). <sup>2</sup> М. Ф. Викулова, В сбор. Докл. на Международн. совещ. по глинам в Брюсселе в 1958 г., Изд. АН СССР, 1959. <sup>3</sup> Р. Е. Грим, Р. Ф. Бредли, Г. Браун, В сборн. Рентгеновские методы определения минералов глин, ИЛ, 1955. <sup>4</sup> Р. Е. Грим, Минералогия глин, ИЛ, 1956.

В. М. ФРИДЛАНД

## ДВА ПУТИ ФОРМИРОВАНИЯ КОНКРЕЦИЙ, ОБРАЗУЮЩИХ ЛАТЕРИТЫ

(Представлено академиком И. В. Тюриным 2 XI 1960)

В многочисленных описаниях латеритов из различных районов тропического пояса отмечается разнообразие их строения, различие форм слагающих их конкреций. Автором <sup>(2)</sup> выделены три формы конкреций, образующих латериты Северного Вьетнама — пизолитовые (или бобовидные), альвеолярные (сетчатые, ячеистые) и псевдоконкреции, представляющие собой обломки устойчивых по отношению к выветриванию минералов, покрытые пленками окислов железа.

Различия форм конкреций (а значит и образованных ими латеритов) связаны с различными условиями их образования. Во-первых, они зависят от характера процессов переноса соединений железа (и, возможно, алюминия), являющихся главными формообразующими компонентами латеритов, которые или состоят в значительной степени из окислов железа, или цементируются ими, превращаясь, таким образом, из рыхлой толщи осадочной породы (или почвенного горизонта) в плотный латерит. Характер процессов переноса зависит от той формы, в которой переносятся эти соединения — истинные растворы двух- или трехвалентного железа, коллоидные растворы, комплексные соединения с органическими или неорганическими веществами и т. д.; он также зависит и от форм почвенной (или грунтовой) влаги, в составе которой переносятся эти вещества (гравитационная, капиллярная или пленочная вода).

Во-вторых, форма конкреций зависит от характера процессов перехода соединений железа (и, возможно, алюминия) из растворенного состояния в твердое (увеличение концентрации раствора вследствие высыхания, понижение температуры раствора, изменение реакции среды, изменение окислительно-восстановительного потенциала и т. д.).

Сведения о составе конкреций и вмещающих их горизонтов почв позволяют выяснить некоторые стороны процессов формирования латеритов. Был изучен состав двух конкреций; 1) пизолитовая конкреция с глубины 30—40 см из разреза латеритной почвы, развитой на отложениях древней террасы четвертичного возраста (провинция Шон-Тай); 2) альвеолярная конкреция с глубины 30—40 см из разреза латеритной почвы, развитой в нижней части склона холма, сложенного допалеозойскими гнейсами (провинция Фу-Тхо).

Кроме состава конкреций определялся и состав вмещающих их горизонтов. В этих четырех образцах помимо валового состава было определено также содержание веществ, нерастворимых в смеси концентрированных  $H_2SO_4$ ,  $HCl$  и  $HNO_3$  (по методу, описанному А. А. Роде <sup>(1)</sup>). По разности определилось содержание веществ, растворимых в указанной смеси. Результаты этих определений приведены в табл. 1.

Как конкреции, так и вмещающие их горизонты оказываются очень бедными всеми элементами за исключением кремния, алюминия, железа и титана, что является типичным для продуктов латеритного выветривания. Особенно очевидным будет латеритный характер продуктов выветривания,

	Содержание, вес. % (на прокаленное вещество)															Молекулярные отношения		
	Литроскоп.	П. п. п.	SiO <sub>2</sub>	SO <sub>3</sub>	P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	R <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	CaO	MgO	MnO	K <sub>2</sub> O	Na <sub>2</sub> O	TiO <sub>2</sub>	Сумма	SiO <sub>2</sub> /Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	SiO <sub>2</sub> /Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	SiO <sub>2</sub> /R <sub>2</sub> O <sub>3</sub>
Пизолитовая конкреция Валовое содержание Фракция, растворимая в трехкислотной вытяжке Фракция, нерастворимая в трехкислотной вытяжке	1,74	10,02	21,12	0,66	0,40	8,42	68,18	77,43	0,23	Сл.	Сл.	0,20	0,06	0,73	99,70	4,28	1,66	1,20
			4,18	He опр.	He	8,10	64,57	73,50	0,01	Сл.	He опр.	0,09	0,03	He	77,04	0,90	0,40	0,24
		16,94	He опр.	He	0,32	3,61	3,93	0,22	Сл.	He опр.	0,41	0,03	0,10	0,77	99,86	6,84	21,30	5,22
Вмещающий горизонт Валовое содержание Фракция, растворимая в трехкислотной вытяжке Фракция, нерастворимая в трехкислотной вытяжке	1,82	6,55	71,66	0,30	0,06	17,75	8,55	27,44	0,15	0,32	Сл.	0,20	0,10	0,77	99,86	6,84	21,30	5,22
			17,12	He опр.	He	17,26	8,40	26,50	0,01	0,09	He опр.	0,07	0,10	He	44,22	1,68	5,38	1,28
		54,54	He опр.	He	0,49	0,15	0,64	0,14	0,21	He опр.	0,13	Сл.	0,80	0,80	100,37	7,38	6,05	3,32
Альвеолярная конкреция Валовое содержание Фракция, растворимая в трехкислотной вытяжке Фракция, нерастворимая в трехкислотной вытяжке	1,26	5,64	58,85	0,55	0,03	13,50	25,82	40,15	0,22	0,32	Сл.	0,23	0,05	0,80	100,37	7,38	6,05	3,32
			7,21	He опр.	He	12,93	25,51	38,44	0,02	0,20	He опр.	0,23	0,05	He	46,40	0,95	0,75	0,42
		51,64	He опр.	He	0,57	0,31	0,88	0,20	0,12	He опр.	Нет	Нет	0,81	0,81	100,45	8,20	32,79	6,65
Вмещающий горизонт Валовое содержание Фракция, растворимая в трехкислотной вытяжке Фракция, нерастворимая в трехкислотной вытяжке	1,23	5,15	76,84	0,37	0,02	15,61	6,20	22,64	0,22	0,11	Сл.	0,22	0,05	0,81	100,45	8,20	32,79	6,65
			21,44	He опр.	He	14,96	5,97	21,76	0,02	0,02	He опр.	0,22	0,05	He	43,21	2,51	9,40	1,94
		55,40	He опр.	He	0,65	0,23	0,88	0,20	0,09	He опр.	Нет	Нет	0,92	0,92	131,71	131,71	131,71	131,71

\* Аналитики Н. А. Андреева и В. Ф. Мочалова.

Таблица 2

Содержание, вес. % (на прокаленное вещество)														
Углерод скоп. вода	П. п. п.	SiO <sub>2</sub>	SO <sub>3</sub>	P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	R <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	CaO	MgO	MnO	K <sub>2</sub> O	Na <sub>2</sub> O	TiO <sub>2</sub>	Сумма
1,74	10,02	21,12	0,66	0,10	8,42	68,18	77,43	0,23	Сл.	Сл.	0,20	0,06	0,73	99,70
			Не опр.	Не опр.	10,48	83,54	95,12	0,01	Сл.	Не опр.	0,12	0,04	Не опр.	99,70
			Не опр.	Не опр.	1,44	15,88	17,29	0,97	Сл.	Не опр.	0,48	0,13	Не опр.	99,70
1,82	6,55	71,66	0,30	0,06	17,75	8,55	27,14	0,15	0,32	Сл.	0,20	0,10	0,77	99,86
			Не опр.	Не опр.	38,98	18,97	59,84	0,02	0,45	Не опр.	0,15	0,23	Не опр.	99,86
			Не опр.	Не опр.	0,88	0,27	1,15	0,25	0,38	Не опр.	0,23	Сл.	Не опр.	99,86
1,26	5,64	58,85	0,55	0,03	13,50	25,82	40,15	0,22	0,32	Сл.	0,23	0,05	0,80	100,37
			Не опр.	Не опр.	27,97	55,18	83,15	0,04	0,43	Не опр.	0,50	0,11	Не опр.	100,37
			Не опр.	Не опр.	1,06	0,58	1,64	0,37	0,20	Не опр.	Нет	Нет	Не опр.	100,37
1,23	5,15	76,84	0,37	0,02	15,64	6,20	22,64	0,22	0,11	Сл.	0,22	0,05	0,81	100,45
			Не опр.	Не опр.	34,77	13,87	48,64	0,05	0,05	Не опр.	0,51	0,12	Не опр.	100,45
			Не опр.	Не опр.	1,14	0,40	1,54	0,35	0,16	Не опр.	Нет	Нет	Не опр.	100,45

## Индолизитовая конкреция

Валовое содержание  
Фракция, растворимая  
в трехкислотной вы-  
тяжке  
Фракция, нераствори-  
мая в  
трехкислотной  
вытяжке

## Вмещающий горизонт

Валовое содержание  
Фракция, растворимая в  
трехкислотной вытяжке  
Фракция, нерастворимая  
в трехкислотной вытяжке

## Альвеолярная конкреция

Валовое содержание  
Фракция, растворимая в  
трехкислотной вытяжке  
Фракция, нерастворимая  
в трехкислотной вытяжке

## Вмещающий горизонт

Валовое содержание  
Фракция, растворимая в  
трехкислотной вытяжке  
Фракция, нерастворимая  
в трехкислотной вытяжке

при учете содержания кварца в конкрециях и вмещающих горизонтах. Фракция, нерастворимая в смеси трех кислот, почти нацело состоит из кварца. Если мы будем рассматривать состав фракции, растворимой в этой смеси, т. е. бескварцевую часть образца, то латеритный характер рассматриваемых продуктов выявится еще более отчетливо.

Конкреции характеризуются аккумуляцией железа и пониженным содержанием кремния и алюминия по сравнению с вмещающим горизонтом. Таким образом, обе конкреции являются железистыми. Вместе с тем, судя по отношению кремния к алюминию в бескварцевой части, в конкрециях, а также в почве, вмещающей пизолитовые конкреции, имеются и свободные окислы алюминия.

Пизолитовые конкреции содержат значительно большее количество железа, чем альвеолярные, вместе с тем в них заметно меньше алюминия и особенно кремния. Обращает на себя внимание ничтожное содержание в конкрециях марганца, который обычно является спутником железа, а также некоторое накопление серы и фосфора (по сравнению с вмещающей породой). Для удобства сравнения состава конкреций и вмещающих горизонтов с составом их фракций, растворимых и нерастворимых в смеси трех кислот, анализы последних были пересчитаны таким образом, что за 100% принимались веса фракций (для более точного сопоставления основанием для расчета бралось не 100, а величины сумм, полученные при валовом анализе образца в целом). Результаты пересчетов приведены в табл. 2.

Сравнение состава фракций, не растворяющихся в смеси трех кислот (в конкрециях и вмещающих их почвенных горизонтах) показало, что состав этих фракций у пизолитовой конкреции и вмещающего ее горизонта отчетливо различается, в то время как у альвеолярной конкреции и вмещающего ее горизонта он весьма близок. Этот факт, наряду с отмеченным выше значительно более высоким содержанием железа в пизолитовой конкреции по сравнению с альвеолярной, дает основание утверждать, что пизолитовые конкреции формируются без включения в их массу существенных количеств минералов вмещающих пород, т. е. они образуются в основном за счет веществ, приносимых почвенными растворами (или грунтовыми водами). Альвеолярные конкреции, в которых нерастворимый остаток, по существу, тождествен нерастворимому остатку вмещающего горизонта, формируются в результате иного процесса — процесса цементации компонентов, слагающих вмещающую породу, веществами, выпадающими из растворов.

Из данных табл. 2 видно, что нерастворимая фракция пизолитовой конкреции значительно богаче кальцием и натрием, чем нерастворимая фракция вмещающего горизонта. Отсюда можно сделать вывод, что пизолитовые конкреции возникли в условиях, когда вмещающая их масса была богаче кальцием и натрием, т. е. была менее выветрелой, чем в настоящее время.

Включенные в конкреции невыветрелые минералы оказались законсервированными, в дальнейшем они не подвергались выветриванию, между тем как эти же минералы, оставшиеся в составе массы вмещающего горизонта, продолжали выветриваться, хотя и очень медленно.

Аналогичное сравнение, проведенное для альвеолярных конкреций и вмещающего их горизонта не обнаружило такой разницы; следовательно, альвеолярные конкреции сформировались уже в то время, когда вмещающая их масса достигла современной, глубокой стадии выветрелости.

Можно предположить и другую причину этого различия — пизолитовые конкреции формируются при коагуляции растворов основаниями, а альвеолярные — при высыхании растворов.

Почвенный институт им. В. В. Докучаева  
Академии наук СССР

Поступило  
31 X 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> А. А. Роде, Тр. Почвенного инст. им. В. В. Докучаева АН СССР, 13 (1936).  
<sup>2</sup> В. М. Фридланд, Сборн. Докл. советских почвоведов к VII Международному конгрессу в США, Изд. АН СССР, 1960.

И. Е. ЛЕСКЕВИЧ и С. В. САВЧУК  
КАОЛИНИТ В НИЖНЕКАРБОНОВЫХ УГЛЯХ  
ЗАПАДНОГО ДОНБАССА

(Представлено академиком Н. М. Страховым 6 XII 1960)

Глинистое вещество в ископаемых углях встречается довольно часто. Для гумусовых углей оно почти всегда каолинитовое (<sup>1,2</sup>), обычно плохо раскристаллизованное, реже каолинит-вермикулитового строения.

В нижнекарбонových углях Западного Донбасса каолинит наблюдался (<sup>8</sup>) чаще в виде небольших линзочек от 1,5—2 мм до различных только под микроскопом с очень тонкочешуйчатым или скрытокристаллически-зернистым строением.

В процессе выполнения работ по комплексным исследованиям нижнекарбонových углей Западного Донбасса нами была посещена первая новостройка в этом районе — шахта Терновская № 1. По всем горным выработкам в верхней части угольного пласта С<sub>1</sub> наблюдался прослой алевритоподобной породы светло-серого цвета мощностью 15—20 мм (рис. 1). Ясно выраженная полосчатая текстура породы обусловлена включениями тонких (от десятых долей до 1 мм) полосок и линзочек углистого вещества. Нижний контакт породного прослоя более четкий, чем верхний.

Под микроскопом (рис. 2) порода состоит из каолинита (~85%) и углистого вещества (~15%), каолинит имеет хорошо выраженную кристаллическую структуру. Зерна его чешуйчатые, пластинчатые, нередко червеобразные, размерами от 0,1 до 1 мм с преобладанием 0,3—0,5 мм. Цвет каолинита светло-серый, почти белый, с желтоватым оттенком, при скрещенных никелях серый, темно-серый. Двупреломление 0,005—0,009. Некоторые зерна окаймлены органическим веществом. В шлифе встречаются единичные зерна кварца размерами 0,01—0,03 мм.

Свободное взаимное расположение углистого вещества и преобладающих зерен каолинита с правильными кристаллографическими очертаниями, наблюдаемые под микроскопом, а также местоположение породного прослоя в угольном пласте и его выдержанность на значительной площади, свидетельствует о сингенетическом происхождении каолинита в условиях озерноболотной фациальной обстановки при наличии вод, богатых гумусом (<sup>5</sup>). Каолинит кристаллизовался в условиях кислой среды из гелей кремнекислоты и глинозема, своим происхождением связанных с корой выветривания полевошпатовых пород Украинского кристаллического массива. Низкое содержание серы в углях пласта С<sub>1</sub> (0,37%) и малая степень восстановленности гелифицированного вещества подтверждают образование прослоя каолинита и угольного пласта в целом в условиях кислой среды, что вполне согласуется с петрографической (<sup>6</sup>) и химико-технологической характеристикой углей.

Характер кривой нагревания породного прослоя из угольного пласта С<sub>1</sub> (рис. 3а), химический анализ (в процентах, табл. 1), а также рентгенографические исследования подтверждают его каолинитовую природу.

Таблица 1

SiO <sub>2</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	SO <sub>3</sub>	Гигроскоп. влага	П. п. п.	Сумма
44,73	39,33	0,10	0,20	14,99	99,15

SiO <sub>2</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> + +TiO <sub>2</sub> + +P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	CaO	MgO	MnO	SO <sub>2</sub>	CO <sub>2</sub>	K <sub>2</sub> O+ +Na <sub>2</sub> O	Гигроскоп. влага	П. п. п.
14,28	1,20	34,52	1,96	0,22	—	0,70	0,98	0,29	0,28	15,84

На площади более восточных участков Западного Донбасса, в Южно-Донбасском районе, среди глинистых минералов в углях также встречены включения каолинита с червеобразной формой кристаллов. В пласте С<sub>11</sub> часто наблюдается каолиновый прослой, образование которого происходило в аналогичных условиях.

Прослой каолинита, получившие название «серика», были отмечены в угольных пластах среднего карбона Донецкого бассейна (<sup>1</sup>). В угольных пластах m<sub>3</sub>, l<sub>3</sub>, l<sub>1</sub>, k<sub>5</sub> и k<sub>8</sub> они прослеживаются почти на всей площади распространения этих пластов и обычно выдержаны по мощности, колеблющейся от 0,01 до 0,1 м. Химический состав «серика» из угольных пластов среднего карбона характеризуется постоянством и довольно близок к приведенным данным для описанного прослоя пласта С<sub>1</sub>. В последнее время А.М.Лаптевой отмечен «серик» в северных районах Донбасса для угольных пластов m<sub>3</sub>, l<sub>3</sub>, k<sub>3</sub>, k<sub>8</sub><sup>4</sup> и других, где так-

же наблюдается парагенетическая связь его с мало восстановленными углями. Прослой такого типа легко опознаются в горных выработках, а также по керну разведочных скважин и служат надежными маркирующими горизонтами. Под микроскопом они представлены в основном каолинитом часто вермикулитового строения с зернами червеобразной формы размерами до 0,5—1 мм (<sup>1,4</sup>).

Сингенетические образования каолинита отмечены Л. О. Станкевичем и П. Г. Нестеренко (<sup>7</sup>) для бурых углей Днепровского бассейна, где кристаллические разности встречаются обычно в небольшом количестве. На некоторых месторождениях (Байдаковское, Семеновско-Головковское) наблюдается увеличение содержания кристаллических разностей в верхних пачках угольного пласта, которые вообще отличаются повышенным содержанием глин. Своим происхождением этот каолинит также связан с корой выветривания Украинского кристаллического массива.

Каолиновые прослой в углях Западного Донбасса не только указывают на фациальную обстановку образования угольного пласта, но могут быть использованы на отдельных участках как корреляционные признаки.

Каолинит, кроме прослоев и линз в угольных пластах, встречается также в эндогенных трещинах блестящих и полублестящих углей (рис. 4) и в этом случае является эпигенетическим образованием. Толщина каолинита,



Рис. 1. Прослой каолинита в верхней части угольного пласта С<sub>1</sub> (1 : 3 Н — В)

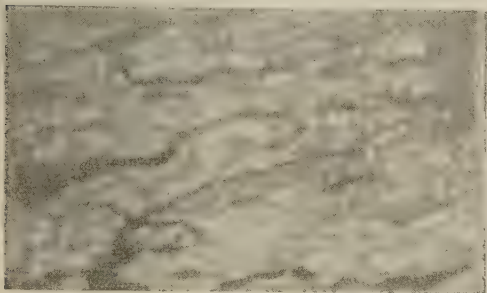


Рис. 2. Микроструктура каолинового прослоя в угольном пласте С<sub>1</sub> (шлиф, об. 9×; оп. 022)

заполняющего трещины, от десятых долей до 1 мм. Эта разновидность каолинита — белого цвета, иногда с кремовым или кремово-желтым оттенком. Под микроскопом эпигенетический каолинит белый с желтоватым оттенком, аморфный; его оптические константы  $N_g = 1,566$ ;  $N_m = 1,565$ ;  $N_p = 1,561$ ;  $N_g - N_p = 0,005$ .

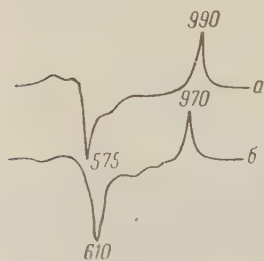


Рис. 3. Термические кривые каолинитов. *a* — сингенетический, *б* — эпигенетический

Термическая кривая эпигенетического каолинита приведена на рис. 3б, химический анализ (в процентах) — в табл. 2.

Эпигенетический каолинит <sup>(6)</sup> образовался также в результате взаимодействия коагулирующих гелей кремнекислоты и глинозема, проникающих по трещинам в уже сформировавшемся угольном пласте, когда органическое вещество перешло в твердую фазу, и поэтому свободных от органического вещества. Такой каолинит обычно не содержит органического вещества.

Каолинит (сингенетический и эпигенетический) составляет в среднем 4—6% неорганической части угольных пластов продуктивной самарской свиты нижнего карбона в Западном Донбассе при колебаниях от 1—2 до 20—25%. В Павлоградско-Петропавловском геологопромышленном районе, являющемся основным в Западном Донбассе, более высокое содержание каолинита отмечено для угольных пластов  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_4^1$  и  $C_7^B$ , для которых характерно маловосстановленное гелифицированное вещество и низкое содержание серы. Следовательно, наличие каолинитового прослоя в угольных пластах отражает определенные геологические и геохимические условия углеобразования.



Рис. 4. Трещины в блестящем угле, выполненные каолинитом

Известная для углей среднего карбона Донецкого бассейна зависимость между степенью сернистости и характером восстановленного режима <sup>(9)</sup> подтверждается также для нижнекарбоновых углей Западного Донбасса.

Днепропетровский горный институт  
им. Артема

Поступило  
17 VI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Геолого-химическая карта Донецкого бассейна, в. 5, 1941. <sup>2</sup> Ю. А. Жемчужников, А. И. Гинзбург, Основы петрологии углей, М., 1960. <sup>3</sup> Н. И. Горбунов, И. Г. Цюрупа, Е. А. Шургина, Рентгенограммы, термограммы и кривые обезвоживания минералов, встречающихся в почвах и глинах, М., 1952. <sup>4</sup> Ю. А. Жемчужников, В. С. Яблоков и др., Строение и условия накопления основных угленосных свит и угольных пластов среднего карбона Донецкого бассейна (ч. 1), в. 15, М., 1959. <sup>5</sup> Л. Б. Рухин, Основы литологии, Л., 1953. <sup>6</sup> С. В. Савчук, Изв. Днепропетр. гор. инст., 25 (1955). <sup>7</sup> Л. О. Станкевич, П. Г. Нестеренко, там же. <sup>8</sup> З. И. Танатар-Бараш, Сов. геол., № 1 (1960). <sup>9</sup> А. З. Широков, ДАН, 103, № 2 (1955).

Ю. П. НЕПРОЧНОВ и М. Ф. МИХНО

**ДАННЫЕ О СТРОЕНИИ ОСАДОЧНОЙ ТОЛЩИ  
ГЛУБОКОВОДНОЙ ВПАДИНЫ ЧЕРНОГО МОРЯ В РАЙОНЕ г. СОЧИ**

(Представлено академиком Н. М. Страховым 28 X 1960)

В марте 1960 г. Черноморской научно-экспериментальной станцией Института океанологии АН СССР на судне «Академик Ширшов» были проведены сейсмические работы методом отраженных волн в глубоководной впадине Черного моря к юго-западу от г. Сочи с целью изучения осадочной толщи. При исследованиях применялась семиканальная приемная установка с пьезокристаллическими сейсмоприемниками — пьезосейсмографная коса. Расстояние между соседними приемниками было равно 100 м; глубина погружения приемников 10—12 м. Каждый сейсмоприемник состоял из пяти пьезобатарей сегнетовой соли и согласующего трансформатора, которые помещены в хлорвиниловый корпус и залиты касторовым маслом. Тонкие соединительные провода удерживались на поверхности моря с помощью маленьких пенопластовых поплавков. Аналогичные приемные устройства уже применялись ранее при сейсмических работах Института физики Земли АН СССР в Охотском море и Тихом океане (1958 г.) и в работах Института океанологии АН СССР в Тихом и Индийском океанах, а также в Черном море (1959 г.).

Регистрация сейсмических волн осуществлялась с помощью усилителей от стандартной переносной сейсмической станции. Наилучшие результаты получены на фильтрации с максимумом частотной характеристики на 30 гц. Одновременно на один из приемников косы включался анализатор (резонансные усилители с максимумами частотных характеристик на 50 и 100 гц) для выявления тонких слоев.

Было отработано три профиля общей протяженностью около 30 км методом отдельных зондирований; расстояние между станциями обычно равнялось 1 миле. Глубина моря в районе исследований увеличивается на юго-запад от 1200 до 1600 м. Во время производства работ судно, буксируя пьезосейсмографную косу, двигалось по профилю малым ходом (около 6 км/час) с кратковременными остановками на момент регистрации взрывов. Заряды тротила весом 5 кг, подвешенные на глубине 1,5 м, опускались с кормы и подрывались в центре установки.

Для иллюстрации характера записей на рис. 2 приведены три сейсмограммы, полученные на профилях I и III. На сейсмограммах можно выделить волны, один и два раза отраженные от дна ( $D_1$  и  $D_2$ ), а также волны, отраженные от границ раздела в осадочной толще. Среди волн, связанных с границами в осадках, почти на всех сейсмограммах доминирующими являются четыре волны: А, Б, В и Г. Несмотря на отсутствие непрерывной системы наблюдений, эти волны неплохо коррелируются от станции к станции по кинематическим и динамическим особенностям (приблизительное равенство времен прихода, сходство амплитуды и формы записи). Характерно, что качество сейсмических записей улучшается при продвижении на юго-запад. Наиболее четкие, хорошо коррелирующиеся отраженные волны

получены на профиле *III*. Кроме волн *А*, *Б*, *В* и *Г*, на высокочастотных каналах можно выделить еще ряд волн, связанных с другими границами в верхней части осадочной толщи (рис. 1, дорожки 1 и 2). Однако корреляцию этих волн осуществить не удастся.

В результате обработки сейсмограмм по основным регулярным отраженным волнам построен сейсмический разрез (рис. 3). Обозначение отражающих границ на разрезе соответствует обозначению сейсмических волн на

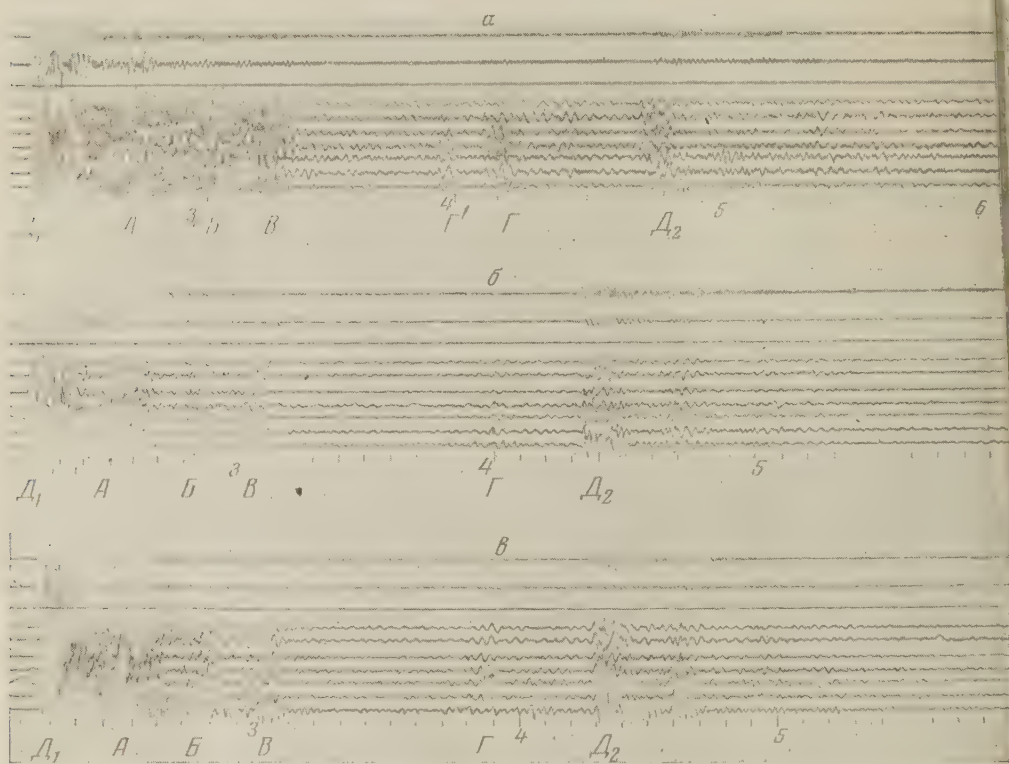


Рис. 1. Примеры сейсмических записей. *а* — профиль *I*, станция № 7, 3 III 1960 г.; *б* — профиль *III*, станция № 16, 4 III 1960 г.; *в* — профиль *III*, станция № 17, 4 III 1960 г. Дорожкам на сейсмограммах соответствуют (сверху вниз): 1-я — канал анализатора 100 гц, 2-я — канал анализатора 50 гц, 4—10-я — каналы пьезосейсмографной косы (30 гц), 11-я — отметки времени (1 сек.)

сейсмограммах. К сожалению, из-за недостаточной длины установки нельзя было сделать уверенных определений средних скоростей распространения сейсмических волн в осадках.

Сравнивая годографы и учитывая данные предшествующих сейсмических работ на Черном море (<sup>3,4</sup>), при построении сейсмического разреза мы условно приняли, что скорость в осадочном слое линейно возрастает с глубиной от 1500 м/сек на дне до 2000 м/сек на глубине 2 км ниже дна. Глубже изучить строение осадочной толщи не удалось, так как выделению волн от более глубоких горизонтов мешают многократно отраженные волны (*Д2* и т. д.).

Тщательное изучение сейсмограмм, годографов и сейсмического разреза позволяет выявить следующие основные черты строения осадочной толщи исследованного района: 1) отражающие горизонты залегают, за исключением некоторых мест, согласно с поверхностью дна; 2) наиболее расчлененной является верхняя часть разреза (600—800 м), где обнаружено несколько слоев с различными физическими свойствами; ниже залегает сравнительно однородный слой мощностью 800—1200 м; 3) самое простое, мало меняющееся от станции к станции, строение осадочной толщи наблю-

дается на более глубоководном участке разреза (профиль III); отражающие границы залегают там почти горизонтально.

По приведенному сейсмическому разрезу (рис. 2) можно судить о ходе процесса осадконакопления в этом районе глубоководной впадины Черного моря. По данным М. В. Муратова <sup>(2)</sup>, здесь происходило интенсивное прогибание уже начиная с олигоцена, причем осадконакопление осуществлялось в условиях глубокого моря. Если принять установленную А. Д. Архангельским и Н. М. Страховым <sup>(1)</sup> среднюю скорость накопления глубоководных илов для Черного моря 1 см в 50 лет и учесть их уплотнение, то получается, что для накопления осадков выше границы Г (1,6—1,8 км) необходимо было около 10 млн. лет. Таким образом, исследованная осадочная толща, по-видимому, охватывает четвертичный период и почти весь плиоцен. Можно также высказать предположение, что граница А, с которой связана интенсивная группа волн, разделяет третичные и четвертичные отложения. Однако вопрос о более полной геологической интерпретации полученных данных должен явиться предметом специального исследования. Для этого необходимо прежде всего получить точные сведения о скоростях сейсмических волн



Рис. 2. Сейсмический разрез. а — станции, б — отражающие площадки, в — уверенная корреляция, г — неуверенная корреляция

в слоях, которые в известной степени характеризуют литологический состав пород, а также увязать результаты исследований с геологией суши.

Черноморская научно-экспериментальная станция  
Института океанологии  
Академии наук СССР

Поступило  
19 X 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> А. Д. Архангельский, Н. М. Страхов, Геологическое строение и история развития Черного моря, М., 1938. <sup>2</sup> М. В. Муратов, Бюлл. МОИП, отд. геол., 30, № 5, 27 (1955). <sup>3</sup> Ю. П. Непрочнов, ДАН, 125, № 5 (1958). <sup>4</sup> Ю. П. Непрочнов, В. П. Гончаров, А. Ф. Непрочнова, ДАН, 129, № 2 (1959).

Д. Г. ПАНОВ и М. К. СПИЧАК

## СКОРОСТЬ ОСАДКОНАКОПЛЕНИЯ В АЗОВСКОМ МОРЕ

(Представлено академиком Н. М. Страховым 6 XII 1960)

Среди современных проблем изучения морских осадков определение скорости осадконакопления в морях различного происхождения и разного географического облика представляет особенно большой интерес <sup>(1)</sup>. Азовское море обладает некоторыми особенностями, позволяющими с достаточной точностью определить скорость современного осадконакопления.

Во-первых, Азовское море представляет относительно изолированный водоем с ограниченным водообменом с соседним Черным морем <sup>(2)</sup>. Преобладающая часть поступающих в море материалов за счет речного стока, разрушения берегов, а также продуктов биогенного происхождения осаждается непосредственно на поверхности его дна. Указанная особенность позволяет применить для расчета скорости современного осадконакопления в Азовском море метод баланса. Другой особенностью Азовского моря является его мелководность и заметное изменение глубин, что позволяет для определения средней скорости осадконакопления воспользоваться сравнением карт глубин за определенный отрезок времени <sup>(3)</sup>.

Определение скорости осадконакопления в Азовском море по методу баланса было впервые выполнено М. В. Федосовым <sup>(4)</sup>, который получил среднюю цифру 0,9 мм/год. Позднее, А. А. Аксенов <sup>(2)</sup>, пользуясь тем же методом, определил среднюю скорость осадконакопления как 0,5 мм/год.

Нами для определения средней скорости современного осадконакопления в Азовском море были приняты следующие исходные величины. Общая продукция планктона 34 млн. т <sup>(5)</sup>. Из них диатомовых 50% и перидиниевых 50% <sup>(5)</sup>. Для диатомовых нерастворимый остаток можно принять равным 65,2%, для перидиниевых 5,2% <sup>(6)</sup>, что в абсолютных величинах, соответственно, составит 11 и 0,9 млн. т/год. Если минерализация равна 95%, то в состав морских осадков войдет 1,7 млн. т/год органического вещества. В итоге общая сумма поступления веществ за счет планктона составит за год 13,6 млн. т/год.

Средняя годовая продуктивность раковин бентоса на площади моря, по многолетним данным, выражается величиной 25,5 млн. т/год. При расчете продукции раковин бентоса нами принята обычная четырехкратная оборачиваемость зообентоса Азовского моря <sup>(5,7)</sup>. Следуя А. А. Аксенову <sup>(2)</sup>, можно принять, что из названного количества только 50% остается в пределах моря, а остальная часть идет на формирование берегов. Судя по карбонатности грунтов Азовского моря (в среднем 22%), можно предположить, что из 12,75 млн. около 10 млн. т раковин ежегодно захоранивается в море. Продукция тканей бентоса равна 4,5 млн. т/год <sup>(5)</sup>; из этого количества только 10%, или 0,4 млн. т/год, отлагается на дне моря. Поступление речных наносов в море выражается величиной 8 млн. т/год <sup>(8)</sup>. Средняя скорость абразии берегов Азовского моря равна 3 м/год <sup>(9)</sup>, что в пересчете на весь абразионный берег даст 8 млн. т терригенного материала в год.

Вес химически осаждающихся карбонатов составляет 1,1 млн. т/год <sup>(4)</sup>. Суммируя приведенные выше величины получим (в млн. т/год):

Биогенные компоненты осадконакопления	24,0
Терригенные компоненты осадконакопления	16,0
Хемогенные компоненты осадконакопления	1,1

Всего . . . 41,1

Принимая удельный вес осадков  $1,43^{(10)}$  и влажность  $70\%^{(11)}$ , получим слой осадка в  $2,5$  мм в год.

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что среди компонентов современного осадконакопления в Азовском море решительно преобладают биогенные, а терригенные вместе с хемогенными занимают подчиненное значение. Указанное соотношение компонентов осадконакопления отражает главную природную особенность Азовского моря, его исключительно высокую среди других морей биологическую продуктивность.

К определению средней скорости современного осадконакопления в Азовском море можно подойти и на основе выяснения изменения глубин в отдельных частях моря. Сравнение батиметрических карт за последние 150 лет позволило сделать выводы о размерах изменения глубин, связанных с накоплением осадков <sup>(3)</sup>. Было найдено, что наибольшее сокращение глубин происходит в центральной части моря и в Таганрогском заливе ( $2,0-2,7$  м). Площади аккумуляции в море занимают  $60\%$ . В прибрежных частях моря выделяются площади преобладающего размыва. На их долю приходится  $40\%$  поверхности морского дна, с уменьшением глубин от  $0,5$  до  $2,7$  м. Учитывая соотношение площадей и величины аккумуляции и размыва морских осадков можно определить скорость осадконакопления для всего моря. Она составит  $2,4$  мм в год.

Как видно, средняя скорость осадконакопления в Азовском море, полученная методом баланса и методом сравнения батиметрических карт, оказывается близкой. Это дает основание признать надежными полученные результаты и оценить значение средней скорости осадконакопления в Азовском море в пределах  $2,4-2,5$  мм в год.

Сравним размеры осадконакопления в Азовском море и в Черном и Каспийском. Для Каспийского моря, используя данные Н. М. Страхова <sup>(1)</sup> об абсолютной скорости осадконакопления ( $39$  г/см<sup>2</sup> за 1000 лет) и принимая средний удельный вес по С. В. Бруевичу <sup>(10)</sup>  $1,43$  и влажность  $50\%$ , получим среднюю скорость осадконакопления  $0,54$  мм/год. По более ранним данным С. В. Бруевича, средняя скорость осадконакопления в Каспийском море была определена в  $0,43$  мм/год (1 м осадка за 2300 лет).

Для Черного моря, используя цифру абсолютной скорости осадконакопления  $48,4$  г/см<sup>2</sup> за 1000 лет <sup>(1)</sup> и принимая удельный вес  $1,43$  и влажность  $50\%$ , получим среднюю годовую скорость осадконакопления  $0,7$  мм/год. Если воспользоваться более ранними данными А. Д. Архангельского <sup>(12)</sup>, принимающего удельный вес осадков Черного моря равным  $1,6$ , получим среднее значение осадконакопления в Черном море  $0,6$  мм/год.

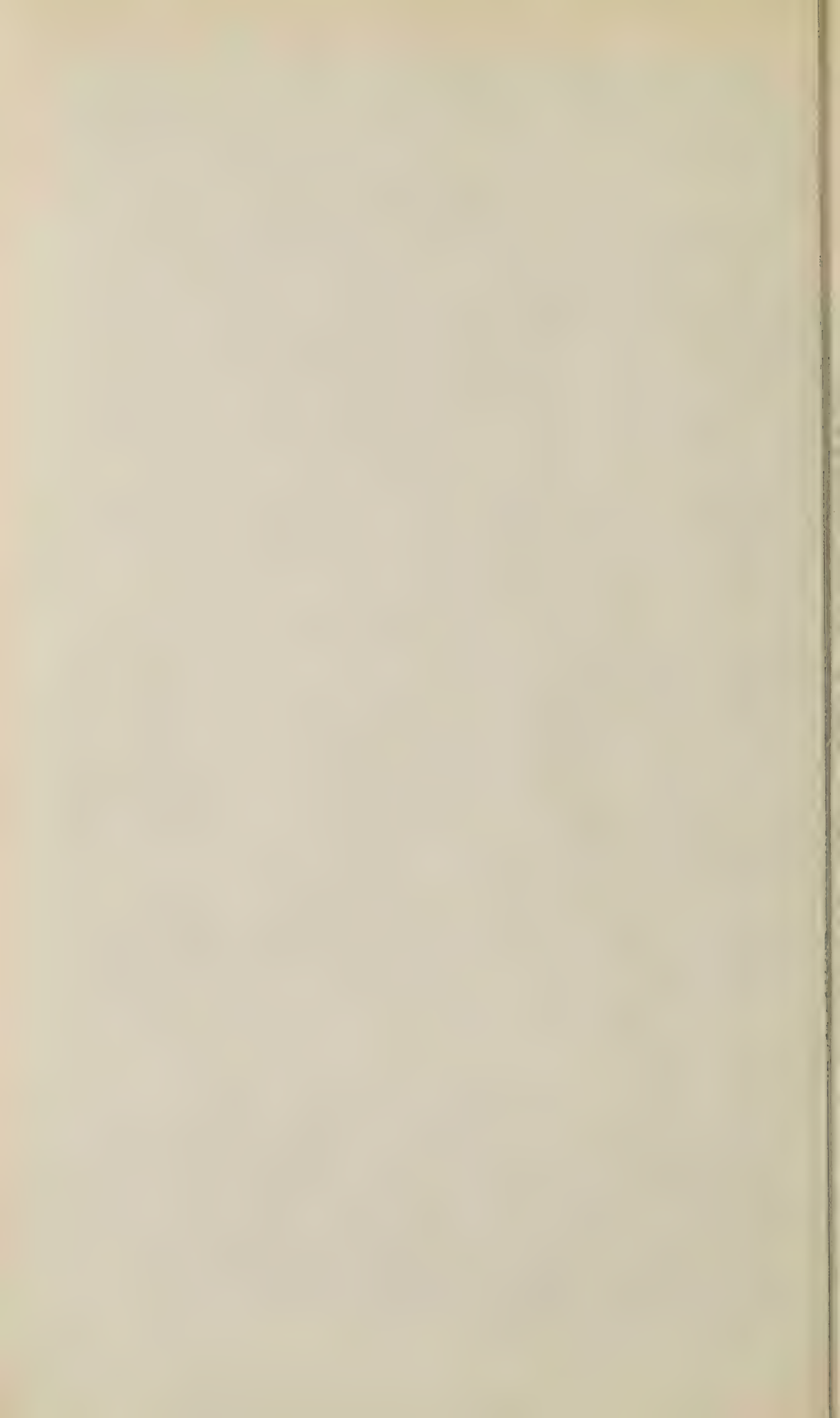
Сравнение скорости современного осадконакопления в Азовском море ( $2,4-2,5$  мм/год) и в других южных морях отчетливо показывает особое положение Азовского моря, которое во многом обусловлено высокой биологической продуктивностью в сочетании с небольшими глубинами.

Азовский бассейновый научно-исследовательский  
институт рыбного хозяйства

Поступило  
6 XII 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Н. М. Страхов и др., Образование осадков в современных водоемах, Изд. АН СССР, 1954. <sup>2</sup> А. А. Аксенов, Тр. Гос. океанографич. инст., в. 31 (1956). <sup>3</sup> Д. Г. Панов, В. А. Мамыкина, Автореф. научно-иссл. работ Ростовск. гос. унив. за 1959 год, Ростов-на-Дону, 1960. <sup>4</sup> М. В. Федосов, ДАН, 84, № 3 (1952). <sup>5</sup> В. Г. Дадко, Органическое вещество в водах южных морей СССР, Изд. АН СССР, 1959. <sup>6</sup> Л. А. Зенкевич, Моря СССР, их фауна и флора, М., 1956. <sup>7</sup> В. П. Воробьев, Тр. Азчерниро, в. 13 (1947). <sup>8</sup> И. В. Самойлов, Устья рек, М., 1952. <sup>9</sup> В. А. Мамыкина, Морфология и динамика берегов северо-восточной части Азовского моря, Автореф. канд. диссер. Ростов-на-Дону, 1960. <sup>10</sup> С. В. Бруевич, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 13, 1 (1949). <sup>11</sup> Т. И. Горшкова, Тр. Всесоюз. научно-иссл. инст. морск. рыбн. хоз. и океаногр., 31, в. 1 (1955). <sup>12</sup> А. Д. Архангельский, Изб. тр., 2, Изд. АН СССР, 1954.



Н. Д. Клочков

## ИЗМЕНЕНИЯ ЭНДОТЕЛИЯ ЛИМФАТИЧЕСКИХ МЕШКОВ ПРИ СОКРАЩЕНИИ ПОДЛЕЖАЩИХ ТКАНЕЙ

(Представлено академиком Н. Н. Аничковым 28 X 1960)

В обширной литературе об эндотелии сосудов имеются лишь немногочисленные и к тому же противоречивые сведения относительно изменений эндотелия при сокращении сосудистой стенки. Шварц (<sup>1</sup>), исследуя эндотелий подвздошных вен кролика, нашел, что при сокращении этих сосудов наибольшим изменениям подвергаются лишь поперечные (по отношению ко всему сосуду) размеры эндотелиальных клеток. По наблюдениям этого автора, в наполненной жидкостью вене длина клеток (вдоль сосуда) составляла 50  $\mu$ , поперечник 15  $\mu$ , а в спавшейся вене, соответственно, 50 и 5  $\mu$ . Форма и величина эндотелиальных клеток крупных сосудов, по мнению Альтшуля (<sup>3</sup>), зависят, с одной стороны, от функционального состояния самого эндотелия, с другой — от таких механических факторов, как кровяное давление и эластичность стенки. Он полагает, что сокращение мышечно-эластических элементов сильно изменяет морфологию эндотелия.

В настоящее время Н. Л. Каменская и Е. Н. Никифорова (<sup>1</sup>), исследуя эндотелий аорты кроликов и морских свинок, нашли, что при сокращении и расслаблении форма клеток эндотелия в основном не изменяется, и лишь незначительно уменьшается продольный и увеличивается поперечный размер клеток.

Нами была сделана попытка непосредственного наблюдения эндотелия мышечного листка в брюшном лимфатическом мешке у лягушки (*Rana temporaria*) при сокращении мышц передней брюшной стенки после их перерезки. Сведений об изменении эндотелия лимфатических мешков лягушек при сокращении подлежащих тканей в литературе нам найти не удалось.

Исследование велось следующим образом. Под переднюю брюшную стенку лягушки через два боковых разреза вводилась восковая пластинка, к которой лимфатический мешок прикреплялся ежовыми иглами, вместе с кожей и мышцами передней брюшной стенки. Вслед за этим он вырезался. После промывания полости мешка рингеровским раствором его кожная стенка удалялась, в результате чего обнажались брюшные мышцы, покрытые эндотелием. Границы эндотелиальных клеток выявлялись с помощью 1/4% водного раствора азотнокислого серебра. Вслед за этим производилось фотографирование участка эндотелиального пласта в проходящем свете. По освобождении мышц от фиксирующих их игл они сокращались, после чего тот же участок эндотелиального пласта фотографировался вторично. Ориентиром при этом служили пигментные клетки, находящиеся в субэндотелиальной соединительной ткани. Условия проделанных опытов, конечно, не являются физиологическими, но тем не менее, в связи с непосредственным наблюдением за одними и теми же клетками до и после сокращения, такая постановка опытов может дать кое-что новое. Для приготовления пленочных плоскостных препаратов материал, взятый аналогичным образом, фиксировался дополнительно в формалине или жидкости Буэна. Препараты окрашивались железным гематоксилином по Гейденгайну и по Ясвоину. Кроме того, делались вертикальные срезы мышц передней брюшной стенки до и после сокращения.

Мышечная часть стенки брюшного лимфатического мешка состоит из эндотелия и соединительнотканной пластинки, которая без резкой границы переходит в межмышечную соединительную ткань. Мышцы центральной части передней брюшной стенки располагаются продольно. Эндотелий, покрывающий их, представляет собою непрерывный пласт тесно сомкнутых и сильно уплощенных клеток. Форма их неодинакова. Имеются полигональные, многолопастные и веретеновидные элементы. Величина клеток также варьирует в значительной степени. В центральных частях пласта продольный размер клеток, параллельно ходу мышечных пучков, вычисленный в каждом случае как среднее арифметическое из 50 проданных измерений, равняется 67,3  $\mu$ , поперечник 64,5  $\mu$ . Островки «темных клеток» (2), имеющиеся в эндотелии кожной части стенки, в ее мышечной части не встречаются. Границы эндотелиальных клеток представляют собою тонкие извилистые линии. Степень извилистости и структура пограничных линий неодинаковы в различных клетках (рис. 1 а, б). Наибольшее количество серебра выпадает по границам клеток, расположенных над крупными сосудами передней брюшной стенки и в области над грудиной. Здесь нередко встречаются широкие границы с «пушистым» отложением серебра. Довольно часты в эндотелии безъядерные площадки. В большинстве же случаев эндотелиальные клетки содержат по одному ядру, которое чаще располагается недалеко от границы. Нередко ядра располагаются под линиями клеточных границ. При этом над одним ядром могут сходиться границы нескольких клеток. Ядра соседних клеток нередко располагаются группами. В боковых отделах мышечной стенки, как правило, встречаются многоядерные клетки, располагающиеся изолированно или группами. Количество ядер в них доходит до 10—12. В цитоплазме эндотелиальных клеток различается околоядерная, темнее красящаяся гематоксилином, часть и периферическая, красящаяся светлее. В околоядерных участках цитоплазмы нередко встречаются мелкие светлые вакуоли, которые иногда деформируют ядра. В многоядерных клетках околоядерные участки сливаются в общую для всех ядер массу базофильной цитоплазмы. В отдельных одноядерных клетках и многоядерных элементах после серебрения вокруг ядер иногда выявляется темный венчик, состоящий из осадка серебра.

При изучении формы и размеров клеток эндотелия после сокращения мышц учту подвергались следующие параметры клеток: продольные и поперечные (по отношению ко всему пласту) диаметры, площадь, плоскостная длина границ. Эти параметры определялись как среднее арифметическое из 50 измерений одних и тех же клеток до и после сокращения. При «суправитальном» исследовании клетки измерялись по фотографиям, сравнение полученных при этом результатов производилось в относительных величинах.

Наблюдения показали, что после сокращения мышц передней брюшной стенки лягушки происходит уменьшение плоскостных размеров эндотелиальных клеток лимфатического мешка. Уменьшение размеров клеток в направлении, параллельном линии сокращения мышц, превосходит уменьшение клеток в поперечном направлении. Первый из этих диаметров уменьшается (в условиях поставленных опытов) в 1,5 раза, а в отдельных клетках в 2 раза (рис. 2 а, б). На фиксированных препаратах он уменьшается в 2,2 раза. Поперечный диаметр и при «суправитальном» исследовании, и после фиксации уменьшается лишь в 1,1 раза. В некоторых случаях он незначительно возрастает (в 1,02 раза). В абсолютных цифрах на фиксированных после сокращения препаратах продольный диаметр клеток равняется 29,3  $\mu$ , поперечный 60,4  $\mu$  (до сокращения, соответственно, 67,3 и 64,5  $\mu$  — см. выше).

При сокращении мышц передней брюшной стенки происходит некоторый сдвиг клеток эндотелия в поперечном к пласту направлении. При этом на поверхности его образуются мелкие складки. Количество и величина складок зависят от степени сокращения мышц.

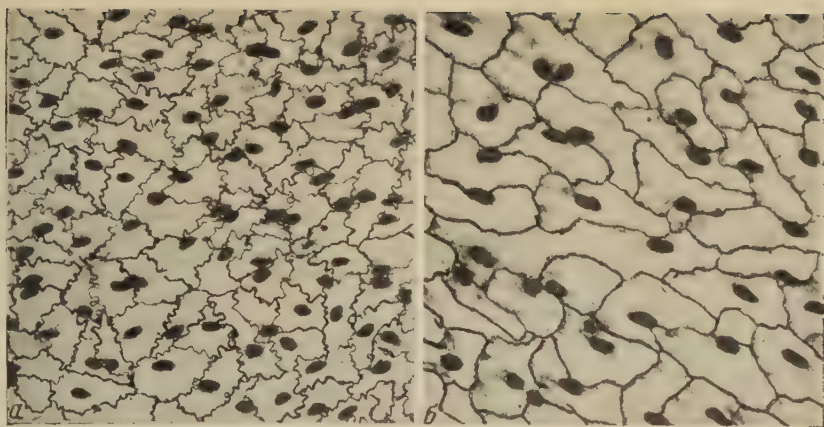


Рис. 1. Эндотелий мышечной стенки брюшного лимфатического мешка до сокращения, *а* — клетки с сильно извилистыми линиями границ; *б* — клетки со слабо извилистыми линиями границ. Серебрение, жидкость Буэна, гематоксилин по Ясвину. 300 ×

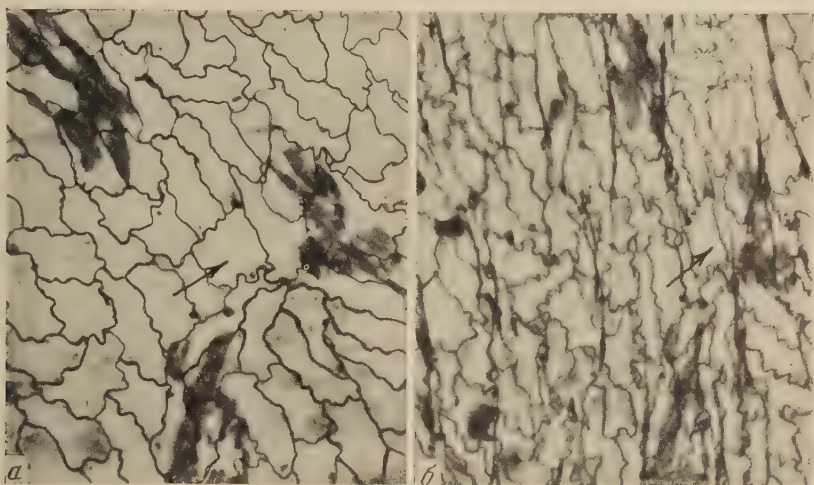


Рис. 2. Эндотелий мышечной стенки брюшного лимфатического мешка до (*а*) и после (*б*) сокращения (то же место). Стрелкой отмечена клетка, продольный диаметр которой уменьшился в 2 раза. Складки на поверхности эндотелия. Серебрение. 400 ×

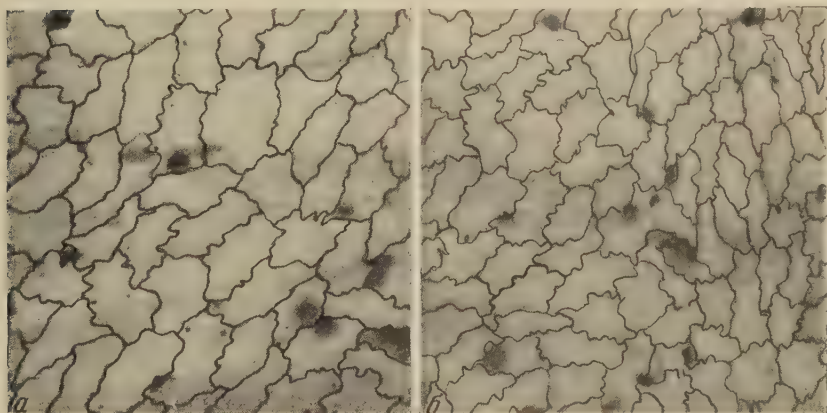
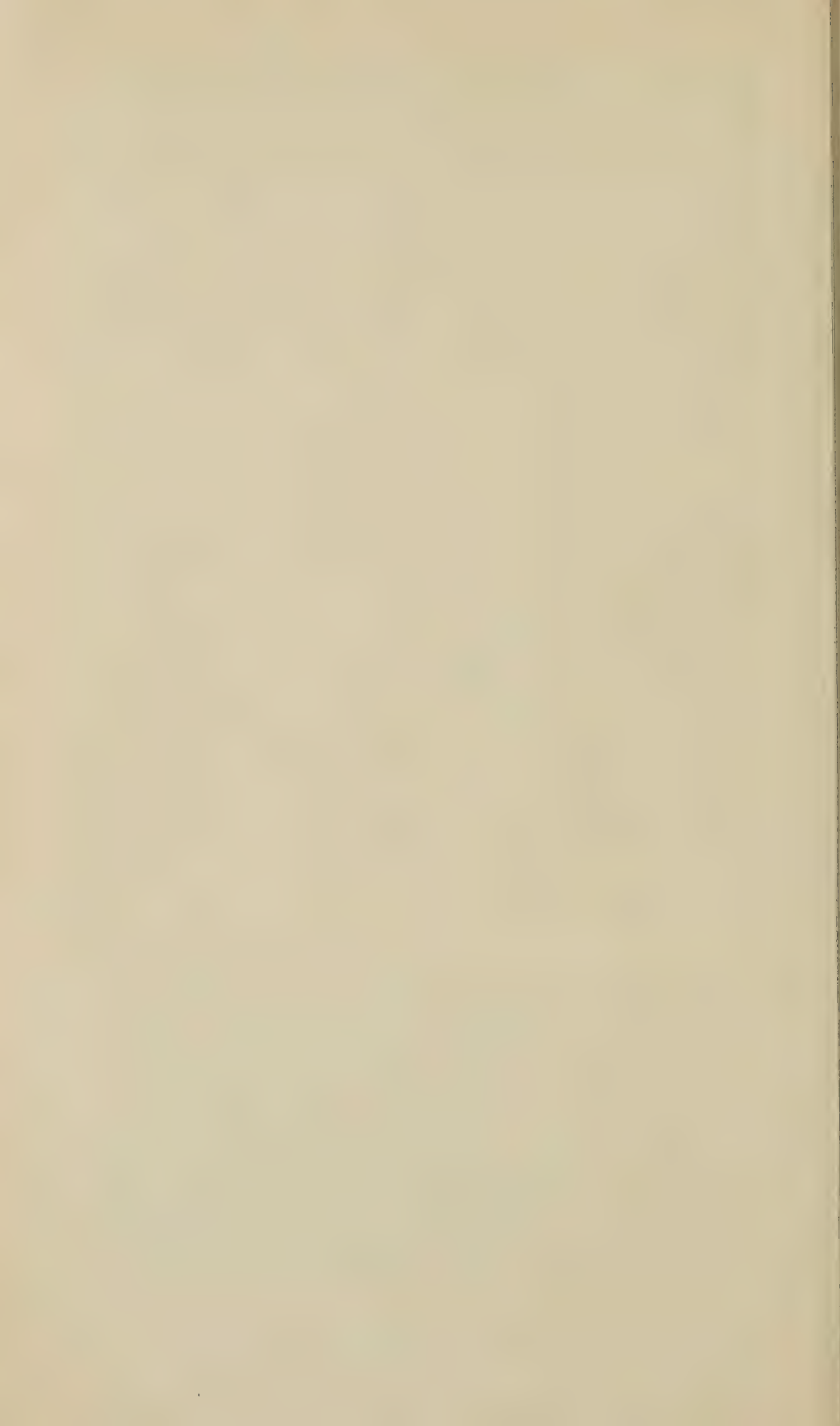


Рис. 3. Эндотелий мышечной стенки брюшного лимфатического мешка до (*а*) и после (*б*) сокращения. Сокращение формы клеток при уменьшении их площади и размеров. Серебрение. 400 ×



Площадь клеток после сокращения уменьшается при «суправитальном» исследовании в среднем в 1,7 раза, после фиксации — в 2—2,5 раза.

Длина границ по плоскости в условиях поставленных опытов уменьшается после сокращения в 1,2 раза. Выступы эндотелиальных клеток не исчезают после сокращения, равно как не образуются заново. При этом происходит главным образом изменение углов, под которыми сходятся участки пограничных линий до сокращения. В границах, расположенных перпендикулярно к линии сокращения, эти углы увеличиваются (становятся более тупыми), в границах же, параллельных линии сокращения мышц, они уменьшаются.

На фиксированных после сокращения препаратах количество ядер на одной и той же площади (поле зрения микроскопа) увеличивается примерно в 2 раза. При этом нередко происходит поворот ядер в направлении, поперечном линии сокращения.

Форма и взаимоотношения клеток при рассматривании с поверхности изменяются очень незначительно, и отыскать нужную эндотелиальную клетку после сокращения довольно легко (рис. 3 а, б). Эндотелиальный пласт в целом сохраняет все морфологические особенности составляющих его элементов. В связи с уменьшением после сокращения площади клеток и плоскостной длины границ следовало бы ожидать соответственного увеличения клеток в толщине. Однако получить на отвесных срезах точные цифровые данные, которые бы соответствовали «суправитальным» исследованиям, пока не представилось возможным. Дело осложняется сильным влиянием гистологической обработки на объем клеток и трудностью учета возникающих при этом изменений в связи с незначительной толщиной клеток.

Таким образом, в условиях проделанных опытов происходит уменьшение плоскостных размеров эндотелиальных клеток. Наибольшее уменьшение клеток наблюдается в направлении сокращения мышц, что согласуется с результатами упомянутого выше исследования, произведенного Шварцем. Уменьшение площади клеток и плоскостной длины границ позволяет предположить соответственное увеличение клеток в толщине. Плоскостные очертания клеток в данных условиях опытов изменяются очень незначительно. После фиксации изменения, происшедшие в эндотелии при сокращении подлежащих тканей, выражены сильнее.

Военно-медицинская академия  
им. С. М. Кирова

Поступило  
18 X 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Н. Л. Каменская, Е. Н. Никифорова, Арх. анат., гистол. и эмбриол., 38, 76 (1960). <sup>2</sup> Н. А. Колесникова, Экспериментально-гистологическое исследование эндотелия лимфатических мешков, Диссертация, Л., 1946. <sup>3</sup> R. Altschul, Endothelium, its Development, Morphology, Function, and Pathology, N. Y., 1954. <sup>4</sup> W. Schwartz, Anat. Anz., 8, 71 (1892).

А. А. ИНОЗЕМЦЕВ

ВОЗДЕЙСТВИЕ МУХОЛОВКИ-ПЕСТРУШКИ (*MUSCICARA  
HYPOLEUCA* RALL.) НА ЧИСЛЕННОСТЬ ЕЕ ЖЕРТВ

(Представлено академиком И. И. Шмальгаузенем 9 XII 1960)

Взаимоотношения между видами, потребляющими животную пищу, и их жертвами представляют не только большой теоретический интерес, но и имеют существенное практическое значение в связи с применением биологического метода борьбы с вредителями сельского и лесного хозяйства. Существенное значение в этой проблеме имеет выяснение степени воздействия хищника на жертву в течение определенного промежутка времени. Исследований такого рода, к сожалению, еще мало (<sup>1, 2, 10, 13, 14, 16-19</sup>). Специальных же работ по выяснению степени воздействия отдельных видов насекомоядных птиц на насекомых в отечественной литературе нет совсем.

Наш материал собран в мелколиственном лесу, расположенном недалеко от пос. Павловская Слобода Красногорского района Московской обл., в период с 17 VI по 2 VII 1959 г. Лес, в котором проводилась работа, состоял из берез в первом ярусе и орешникового подлеска.

Методика определения численности и видового состава беспозвоночных в разных ярусах леса была различной. Фауну подстилки и травяного покрова учитывали по методике В. Е. Догеля (<sup>3</sup>); беспозвоночных, обитающих на листьях и ветвях подлеска и древостоя, — путем взятия в марлевый мешок модельных ветвей. В каждом из этих случаев в работе принимали участие два-три человека; особое внимание обращалось на то, чтобы не было «утечки». При лабораторном определении материала из подстилки и травяного покрова число беспозвоночных относили к учетной площади, с которой они были собраны. Таких учетных площадок было заложено 20, каждая размером 543 см<sup>2</sup>.

При разборе материала из марлевых мешков подсчитывали число листьев на каждой модельной ветви, а число найденных беспозвоночных относили к числу листьев, оказавшихся в данной пробе. Всего на модельных ветвях орешника было просмотрено 1802 листа, а на модельных ветвях березы 2170.

На стволах орешника обитателей учитывали путем сбора их от комля до вершины (всего были подсчитаны обитатели на 50 стволиках). Обитателей стволов берез учитывали путем сбора всех беспозвоночных на определенных участках поверхности ствола (часть которых находилась ниже крон подлеска, а часть — над ним) и перерасчета на всю его поверхность (всего было просмотрено свыше 100 стволов). Экземпляры длиной около 1 мм или менее не учитывали, так как они не входят в число объектов питания мухоловки-пеструшки. Поэтому некоторые группы мелких беспозвоночных (тли, цикадки, ногохвостки) представлены в учетах заниженным числом. Всего, таким образом, было собрано и определено около 3,5 тыс. беспозвоночных, которые и послужили основой для дальнейших расчетов.

Было подсчитано число деревьев и кустарников, приходящихся на единицу площади, а также среднее число листьев на них, что дало возможность сделать перерасчет абсолютного числа беспозвоночных, приходящихся на единицу площади леса. При этом оказалось, что основная масса беспозвоночных, по размерам и доступности представляющих собой потенциальные

жертвы мухоловки-пеструшки, сосредоточена на листьях березы (66% от числа беспозвоночных на единицу площади леса). Число же объектов на стволах берез составляет лишь немногим более 1%; соответственно число беспозвоночных на листе орешника менее 6%, на стволиках орешника около 0,2%, в подстилке и травяном покрове около 27%. Так как в зону, облавливаемую мухоловками, входят все ярусы леса <sup>(11)</sup>, все беспозвоночные оказываются практически достигаемыми для охотящихся птиц.

Поскольку плотность гнездящейся популяции мухоловки-пеструшки зависит исключительно от количества подходящих для гнездования дупел и искусственных гнездовий <sup>(8, 7, 12)</sup>, все остальные расчеты велись исходя не из весьма изменчивой для разных участков леса «средней плотности гнездования» вида, а из размеров охотничьего участка <sup>(6)</sup>, площадь которого весьма постоянна в мелколиственном лесу:  $M \pm m = 1500 \pm 16 \text{ м}^2$ .

На этой площади было в среднем 120 кустов орешника и 180 берез. Зная, что в каждом кусте орешника примерно 6,6 стволиков, а количество листьев составляет в среднем 5000 на кусте орешника и ~80 000 на березе, легко рассчитать количество тех или иных видов или групп беспозвоночных, обитающих на площади охотничьего участка (см. табл. 1).

Переходя к количественной характеристике беспозвоночных, уничтоженных на площади охотничьего участка в гнездовой период, мы исключаем из расчета питание пары птиц-родителей, так как невозможно учесть количество съеденной взрослыми птицами пищи визуально, анализ же содержимого желудков дает искаженную картину <sup>(4)</sup>.

Количество беспозвоночных, потребляемых выводком мухоловки-пеструшки за время пребывания в гнезде, рассчитано следующим образом. Размер «среднего» выводка в гнезде из мелколиственного леса в 1959 г. равнялся 5,4 juv.; число прилетов взрослых к гнезду с 6 птенцами в час равно 28,2 \*. Отсюда, учитывая данные А. Н. Промптова <sup>(9)</sup> о стабильности интенсивности кормления, а также, что в среднем выводок состоит не из 6, а из 5 птенцов и что кормление продолжается 16—17 час. в сутки, получаем примерно 405 прилетов птиц с кормом в день. Близкая цифра (450) приводится Хартманом <sup>(11)</sup> для выводка 5,5 птенцов. Так как в мелколиственном лесу птенцы проводят в гнезде 15 дней, число порций корма, принесенных взрослыми, будет 6075. Этими 15 днями и ограничивается пребывание птенцов в пределах данного охотничьего участка, так как сразу по вылете из гнезда выводок покидает место гнездования.

Всего за период наблюдений у птенцов в возрасте от 4 до 13 дней было отнято 344 порции корма, содержавшие около 900 экземпляров беспозвоночных, относящихся к 172 видам. Из этих данных и было рассчитано количество тех или иных видов и групп беспозвоночных, съеденных птенцами за период пребывания в гнезде (см. табл. 1).

Приведенные данные, в силу некоторых условностей самого количественного учета, не претендуют на полную точность, однако они, по-видимому, достаточно четко отражают взаимоотношения мухоловки-пеструшки с ее жертвами в данных условиях.

Как видно из табл. 1, степень воздействия мухоловки-пеструшки (в данном случае — выраженное в процентах отношение части беспозвоночных, съеденных птенцами, к абсолютной численности этих же видов на охотничьем участке) на различные виды и группы беспозвоночных колеблется в очень широких пределах. При этом некоторые виды уничтожаются на  $\frac{1}{3}$  и даже больше. Однако здесь надо подчеркнуть, что речь идет о воздействии только в пределах охотничьего участка: если учесть, что средняя плотность гнездования мухоловки в мелколиственном лесу в 1959 г. была ниже, чем 1 пара на 1 га, то, следовательно, степень воздействия на беспозвоночных по всему лесному массиву будет в несколько раз ниже, чем приведенная.

\* Среднее выведено на основании трех круглосуточных и 20-часовых наблюдений у гнезд.

## Воздействие мухоловки-пеструшки на ее жертвы

Вид пищи	Фаза развития	Абсолютное число		Степень воздействия, %	Соотношение, %		Индекс изобр. способ. (E)
		принесен. к гнезду за 15 дн.	на охотничьем участке		в лесу (P <sub>i</sub> )	в пище (r <sub>i</sub> )	
МОЛЛЮСКИ							
Pulmonata (кроме голых слизней)		265	7 300	3,6	0,4	1,7	+0,6
ПАУКООБРАЗНЫЕ							
Lycosidae		106	21 900	0,5	1,2	0,7	-0,3
Araneae		951	39 900	2,4	2,3	6,3	+0,5
Phalangida		194	6 200	3,1	0,4	1,3	+0,6
МНОГОНОЖКИ							
Diplopoda		212	18 000	1,2	1,0	1,4	+0,2
НАСЕКОМЫЕ							
Веснянки							
Plecoptera	Имаго	141	1 400	10,2	0,1	0,9	+0,8
Равнокрылые							
Jassidae	Имаго	530	63 400	0,8	3,6	3,5	-0,02
Cicadoidea бл. не опр.	Нимфа	442	13 500	3,3	0,8	2,9	+0,6
Aphididae	Имаго	71	685 400	0,01	38,9	0,5	-1,0
Полужесткокрылые							
Miridae	Имаго	88	48 400	0,2	2,8	0,6	-0,7
Прочие Heteroptera	Имаго	299	21 700	1,4	1,2	2,0	+0,2
Жесткокрылые							
Athous sp.	Имаго	442	13 400	3,3	0,8	2,9	+0,6
Cantharididae	Имаго	301	2 100	14,4	0,1	2,0	+0,9
Coccinellidae	Личинки	1448	28 400	5,1	1,6	9,6	+0,7
Phyllobius argentatus	Имаго	212	158 200	0,1	9,0	1,4	-0,7
Curculionidae бл. не опр.	Имаго	212	148 400	0,1	8,4	1,4	-0,7
Прочие Coleoptera	Имаго	143	48 300	0,3	2,7	0,9	-0,5
Перепончатокрылые							
Tenthredininae	Имаго	636	4 100	15,4	0,2	4,2	+0,9
	Личинки	2066	10 100	20,5	0,6	13,6	+0,9
Formicidae	Имаго	124	19 100	0,7	1,1	0,8	-0,2
Прочие Hymenoptera	Имаго	230	5 900	3,9	0,3	1,5	+0,6
Двукрылые							
Rhagio scolopaceus	Имаго	459	2 200	20,7	0,1	3,0	+0,9
Dioctria oelandica	Имаго	336	1 700	19,6	0,1	2,2	+0,9
Empis tessellata	Имаго	565	1 400	40,9	0,1	3,7	+1,0
Прочие Diptera	Имаго	1186	35 900	3,3	2,0	7,8	+0,6
	Личинки	53	9 700	0,5	0,5	0,3	-0,2
Ручейники							
Trichoptera	Имаго	71	600	12,1	0,03	0,5	+0,9
Чешуекрылые							
Tortricidae	Гусеница	618	4 600	13,5	0,3	4,1	+0,9
Geometridae	Гусеница	389	27 900	1,4	1,6	2,6	+0,2
Porthetria dispar	Гусеница	265	78 400	0,3	4,4	1,7	-0,4
Noctuidae	Гусеница	1042	16 400	6,4	0,9	6,9	+0,6
Прочие Lepidoptera	Имаго	898	4 500	19,9	0,3	5,9	+0,9
	Гусеница	106	2 000	5,4	0,1	0,7	+0,7
ПРОЧИЕ							
БЕСПОЗВОНОЧНЫЕ	Главн. обр. личинки и куколки насекомых	89	213 300	0,04	12,2	0,6	-0,9
Итого . . . . .		15 190	1 763 500	0,86			

Не менее важным, чем «степень воздействия», показателем, характеризующим взаимоотношения хищника с жертвой, является выборочность в питании, на наличие которой указывается в ряде работ (<sup>15,17</sup>). Последняя определяется показателем элективности  $E = \frac{r_i - p_i}{r_i + p_i}$ , примененным в экспериментальной ихтиологии В. С. Ивлевым (<sup>5</sup>).

Избирательность мухоловки-пеструшки по отношению к наиболее массовым видам мелколистственного леса (тли, долгоносики и т. п.) оказывается отрицательной, что, по-видимому, связано с непригодностью этих видов как пищи для птенцов. По отношению же к формам с мягкими покровами (личинки, гусеницы, мухи и др.) чаще проявляется положительная избирательность. При этом факт частой встречаемости в добыче мух и бабочек, видимо, можно объяснить еще и тем, что они обитают в зоне, наиболее интенсивно облавливаемой мухоловками, и, в силу заметности, легко становятся жертвами охотящихся птиц.

Спектр питания (процентное отношение отдельных объектов в рационе птенцов ко всей сумме особей, входящих в этот рацион), как видно из табл. 1, не отражает ни избирательности в питании данного вида, ни того воздействия, которое испытывают беспозвоночные с его стороны. Таким образом, выборочность, определенная только на основе данных по питанию птенцов, не отражает действительной избирательности по отношению к поедаемым видам.

Резюмируя вышеизложенное, можно заключить, что наиболее объективными показателями, характеризующими фактическое воздействие хищника на численность его жертв, являются «степень воздействия» и связанный с нею прямой корреляцией «индекс избирательной способности». Эти два показателя могут достаточно точно характеризовать значение данного вида хищника в биоценозе. В частности, видно (табл. 1), что достаточно сильному воздействию со стороны мухоловки-пеструшки подвергается ряд полезных для леса хищных насекомых (толкунчики, бекасницы, ктыри, личинки божьих коровок и наездники). Поэтому, несмотря на то, что мухоловки уничтожают ряд вредителей (чешуекрылых пилильщиков), в целом, с лесохозяйственной точки зрения, мы не можем оценить их деятельность в мелколистственном лесу как «полезную», а склонны расценивать ее как «безразличную».

Московский государственный  
педагогический институт  
им. В. И. Ленина

Поступило  
8 XII 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> В. М. Г а л у ш и н, Конфер. молодых научн. сотр. фак. естествозн. Московск. гос. пед. инст. им. Ленина, тез. докл., 1958, стр. 13—15. <sup>2</sup> В. М. Г а л у ш и н, ДАН, 132, № 4, 936 (1960). <sup>3</sup> В. А. Д о г е л ь, Русск. зоол. журн., 4, 1—2, 117 (1924). <sup>4</sup> М. Д. З в е р е в, Природа, № 8, 72 (1939). <sup>5</sup> В. С. И в л е в, Экспериментальная экология рыб, М., 1955. <sup>6</sup> А. А. И н о з е м ц е в, Уч. зап. фак. естествозн. Московск. гос. пед. инст. им. Ленина, 142, № 4, 153 (1960). <sup>7</sup> Г. Н. Л и х а ч е в, Тр. Бюро кольц., в. 8, 123 (1955). <sup>8</sup> А. В. М и х е е в, Уч. зап. каф. зоол. Московск. гос. пед. инст. им. Ленина, 74, в. 4, 145 (1953). <sup>9</sup> А. Н. П р о м п т о в, Зоол. журн., 19, в. 1, 143 (1940). <sup>10</sup> M. M. B e t t s, J. Animal Ecol., 24, № 2, 282 (1955). <sup>11</sup> L. H a a r t m a n, Acta Zool. Fennica, № 83, 1 (1954). <sup>12</sup> L. H a a r t m a n, Ibid., 98, № 3, 460 (1956). <sup>13</sup> H. N. K l u i j v e r, Versl. Meded. Plantenzicktenk, Wageningen, 69, 1 (1933). <sup>14</sup> D. L a c k, The Natural Regulation of Animal Numbers, Oxford, 1954. <sup>15</sup> P. P a l m g r e n, Acta Zool. Fennica, 14, 1 (1932). <sup>16</sup> L. T i n b e r g e n, Ardea, 34, 1 (1946). <sup>17</sup> L. T i n b e r g e n, Nederl. Boschb. Tijdschr., 4, 91 (1949). <sup>18</sup> L. T i n b e r g e n, Arch. neerl. zool., 31, № 3, 265 (1960). <sup>19</sup> W. H. V a n - D o b b e n, Ardea, 40, 1 (1952).

Л. З. РОДИОНОВА

ИЗМЕНЕНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ К ВЫСОКОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ  
В РАЗВИТИИ КИТАЙСКОГО ДУБОВОГО ШЕЛКОПРЯДА  
(ANTHERAEA PERNYI G.-M.)

(Представлено академиком Е. Н. Павловским 9 XI 1960)

В онтогенетическом развитии насекомых существует отчетливо выраженная периодичность физиологических процессов. Установлено, что в ходе постэмбрионального развития насекомых, во время линек, на отдельных этапах метаморфоза имеют место ритмичные понижения общего уровня интенсивности обмена веществ и газообмена. Эти периоды пониженного обмена сменяются резким усилением процессов метаболизма (<sup>1-5</sup>). Кроме периодичности процессов обмена, связанной с линьками, в личиночном развитии насекомых существует, по-видимому, и второй тип периодичности обмена веществ, с линьками не связанный, обусловленный неравномерностью процессов закладки имажинальных органов (<sup>6</sup>). Данные ряда исследований указывают на наличие определенной ритмичности физиологических процессов и в эмбриональном развитии насекомых (<sup>7-10</sup>).

В онтогенезе китайского дубового шелкопряда периодичность обменных процессов выражена очень четко. Исследования, посвященные изучению газообмена во время эмбрионального развития этого вида, свидетельствуют о наличии двух периодов спада интенсивности дыхания (<sup>8,9</sup>). Первый из них, при инкубации грены в условиях 25°, приходится на 3—4 день развития и совпадает с моментом погружения зародышевой полоски в желток — концом бластокинеза. Второй, менее ярко выраженный, период падения обмена приходится на 6—7 день развития и соответствует моменту полного исчезновения желтка в яйце (<sup>9</sup>). Периодические колебания, связанные с линьками во время личиночного развития китайского дубового шелкопряда, установлены для интенсивности дыхания, активности каталазы (<sup>5,12</sup>) и сукциндегидразы (<sup>11</sup>), окислительно-восстановительного потенциала в тканях и гемолимфе (<sup>1</sup>), количества резервных веществ — гликогена (<sup>12</sup>) и жира (<sup>13</sup>), для белкового обмена (<sup>14</sup>). Интенсивность газообмена, которая в общем снижается по мере роста и развития гусениц дубового шелкопряда, во время линек обнаруживает глубокую депрессию, тогда как активность каталазы и сукциндегидразы, а также рН и окислительно-восстановительный потенциал в это время повышаются (<sup>1,5,11</sup>).

Известно, что чувствительность насекомых к таким повреждающим агентам, как высокие и низкие температуры, инсектисиды, ионизирующие излучения, неодинакова на отдельных стадиях индивидуального развития (<sup>3, 4, 6, 9, 15-18</sup>). По-видимому, эти различия находятся в связи с физиологическими особенностями развития, и прежде всего — с периодичностью некоторых процессов обмена веществ. Изучение изменения чувствительности насекомых в отношении повреждающих факторов внешней среды («критические периоды»), помимо несомненного теоретического интереса в плане познания общих закономерностей онтогенеза, имеет большое практическое значение как для установления режимов разведения полезных видов, так и при разработке мероприятий по борьбе с вредителями.

В настоящей работе сделана попытка выявить критические периоды в эмбриональном и личиночном развитии китайского дубового шелкопряда по отношению к сублетальным дозам высокой температуры.

В качестве критерия чувствительности была избрана температура  $49^{\circ}$ , которая при кратковременном воздействии на яйца и гусениц дубового шелкопряда не приносит заметного вреда, но при более длительных экспозициях оказывается летальной. Все эксперименты проводились в термостате при постоянной температуре  $49 \pm 0,5^{\circ}$ .

Материалом служили яйца и гусеницы дубового шелкопряда первой генерации бивольтинной породы ИЗАН, полученные с Украины. Опыты проводились на Кропотовской биологической станции АН СССР (Московская обл.) в летние сезоны 1958 и 1959 гг. Инкубация яиц осуществлялась при

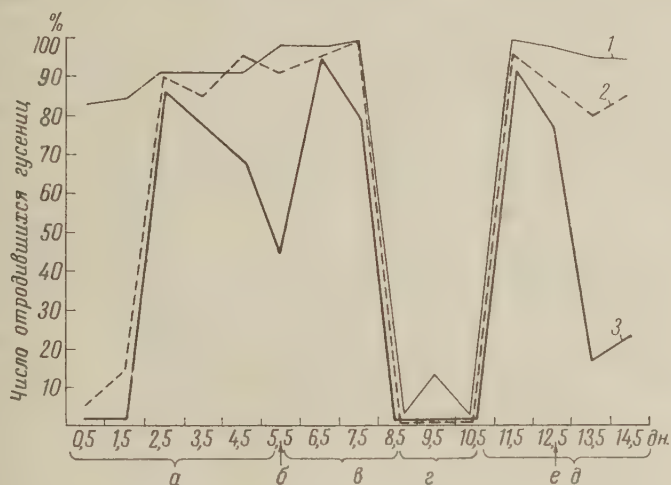


Рис. 1. Чувствительность яиц дубового шелкопряда к высокой температуре ( $49^{\circ}$ ) при экспозициях 10 (1), 20 (2) и 30 (3) мин. а — образование и быстрый рост зародышевой полоски, б — погружение зародышевой полоски в желток, в — бластокинез, г — завершение формирования личиночных систем органов, д — дальнейший рост и развитие эмбриона, е — исчезновение свободного желтка в яйце

температуре  $17-17,5^{\circ}$  и относительной влажности воздуха  $80-85\%$ . При этих условиях эмбриональное развитие заканчивалось за 15,5 суток. Такая сравнительно низкая температура была взята в расчет на то, что замедленное развитие позволит более четко выявить критические периоды. Устойчивость яиц определялась начиная с 12 час. после откладки и затем каждые сутки до выхода гусениц. Опыты велись при трех экспозициях: 10, 20 и 30 мин., в трех повторностях, в каждой из которых участвовало по 20 яиц. Результаты опытов устанавливались по проценту отродившихся гусениц. В качестве контроля использовались яйца соответствующих сроков развития, не подвергавшиеся действию высоких температур.

Выкормка гусениц велась на открытом воздухе под сеткой на ветвях дуба, помещенных в корыта с водой. Устойчивость гусениц к высокой температуре определялась: а) перед каждой линькой (начало сна); б) после каждой линьки (белоголовые, еще не питающиеся); в) через каждые два дня на протяжении межличиночных периодов. Определения устойчивости к сублетальной температуре ( $49^{\circ}$ ) проводились на сериях одновозрастных гусениц при одной экспозиции (40 мин.). Каждая серия содержала по 80—100 гусениц, разделенных в зависимости от возраста на 8 или 10 партий. Подопытные гусеницы после воздействия на них высокой температурой содержались в стеклянных, закрытых марлей, банках в условиях лаборатории, на ежедневно сменяемых листьях дуба.

Контроль в трех повторностях содержался в тех же условиях. Результаты опытов учитывались по числу выживших гусениц на 3 сутки. При обработке полученных данных во всех опытах введена поправка на контроль.

Результаты проведенных исследований представлены на рис. 1 и 2. Параллельно с выявлением критических периодов была сделана попытка увязать их с морфологическими этапами развития зародыша. Как выяснилось при температуре  $17-17,5^{\circ}$ , при которой инкубировались яйца, в течение первых 5,5 суток эмбрионального развития происходит рост зародышевой полоски, которая на 6 сутки погружается в желток, на 9 сутки достигается конечная фаза бластокинеза и заканчивается формирование дорсальной части тела зародыша. В интервале от 8,5 до 10,5 дней завершается формирование личиночных систем органов.

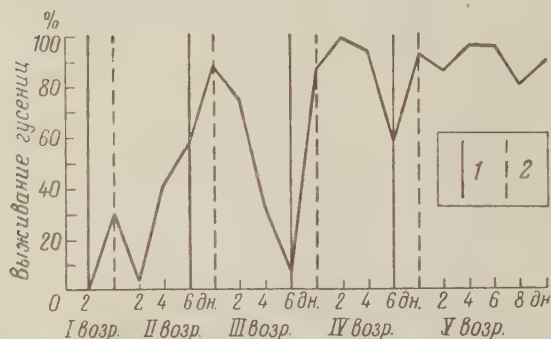


Рис. 2. Чувствительность гусениц дубового шелкопряда к высокой температуре ( $49^{\circ}$ , экспозиция 40 мин.). 1 — начало линьки (сон), 2 — окончание линьки (белоголовые)

В дальнейшем происходит рост уже сформировавшейся гусеницы, хитинизация и пигментация ее покрова. Полное исчезновение желтка в яйце отмечается при такой температуре развития на 12 сутки.

На рис. 1 приведены кривые, отражающие устойчивость яиц китайского дубового шелкопряда на разных этапах их развития к высокой температуре ( $49^{\circ}$ ) при разных экспозициях. Ход кривых показывает, что в течение первых 2 суток от начала развития яйца дубового шелкопряда

весьма чувствительны к перегреванию, затем их устойчивость быстро возрастает, слегка снижаясь к моменту погружения зародышевой полоски в желток, и достигает максимума в период бластокинеза. В течение следующего периода, когда завершается образование личиночных систем органов (от 8,5 до 10,5 суток), устойчивость эмбриона к сублетальной температуре вновь резко возрастает и снова падает на 14 сутки. Наконец, незначительное повышение устойчивости отмечается к моменту выхода гусеницы из яйца.

Таким образом, периоды падения интенсивности газообмена, связанные с определенными этапами развития эмбриона китайского дубового шелкопряда, которые были отмечены Шельдешовой<sup>(9)</sup>, соответствуют периодам наибольшей устойчивости эмбриона к такому неблагоприятному фактору внешней среды, как перегревание. Наоборот, периоду, следующему за бластокинезом, характеризующемуся значительным подъемом интенсивности дыхания, соответствует резкое повышение чувствительности эмбриона к повреждению действием высокой температуры. Г. Ф. Гаузе и В. В. Алпатов<sup>(7)</sup>, определяя устойчивость яиц тутового шелкопряда к высокой температуре, также пришли к заключению, что она очень резко понижается в середине развития эмбриона (5—6 день при общей продолжительности эмбрионального развития в 10 дней).

Результаты изучения устойчивости гусениц дубового шелкопряда к высокой температуре представлены на рис. 2. Как видно из хода кривой, устойчивость гусениц к перегреванию увеличивается по мере их развития, достигая наибольшего значения в IV—V возрасте. Однако это увеличение происходит неравномерно, нарушаясь периодами линек. Как правило, устойчивость гусениц к перегреванию понижается к началу каждой линьки и повышается к моменту ее окончания. Особенно значительно снижение устойчивости происходит при линьке гусениц на IV возраст. Исключением

является II возраст, в первой трети которого наблюдается повышение чувствительности гусениц к перегреванию, сменяющемуся резким увеличением их устойчивости, продолжающимся в течение всей линьки на III возраст. Возможно, что увеличение устойчивости гусениц во второй половине II возраста обусловлено падением обмена веществ, не связанным с линьками (4), природа которого требует дополнительных морфологических и физиологических исследований.

Полученная нами кривая измерения устойчивости гусениц к высокой температуре по мере их развития является, в общем, зеркальным отражением кривой интенсивности газообмена гусениц дубового шелкопряда, приведенной Е. А. Сазоновой (12). Периодам повышенной устойчивости гусениц соответствуют периоды понижения интенсивности газообмена, и, наоборот, периоды повышения устойчивости совпадают с моментами, когда газообмен падает. Однако внутри самого процесса линьки устойчивость гусениц к перегреванию неодинакова. В начале личиночного сна чувствительность гусениц к повышенной температуре резко падает. Поэтому «спящие» гусеницы оказались менее устойчивыми к повреждающему действию высокой температуры, чем только что перелинявшие, белоголовые.

Следовательно, по отношению к такому фактору, как перегревание, можно выделить критические периоды и в эмбриональном, и в личном развитии дубового шелкопряда.

Периодами наименьшей устойчивости яиц к действию сублетальных доз высокой температуры следует считать, во-первых, начало развития эмбриона, когда происходит образование зародышевой полоски, и, во-вторых, отрезок развития, в течение которого завершается образование личиночных систем органов, что соответствует примерно началу второй половины эмбрионального развития.

Устойчивость гусениц к сублетальной температуре увеличивается по мере их развития и достигает максимума в IV—V возрасте. Она резко снижается к началу каждой линьки и увеличивается к концу ее. Период наименьшей устойчивости гусениц к высокой температуре охватывает весь I, две трети II и конец III возраста.

Институт морфологии животных им. А. Н. Северцова  
Академии наук СССР

Поступило  
28 X 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Р. Д. Гальцова, Уч. зап. Московск. пед. инст. им. В. И. Ленина, 34, № 5, 85 (1945). <sup>2</sup> Н. О. Голышев, Тр. Центр. шелк. станц. РСФСР, 3, 1—4, 129 (1928). <sup>3</sup> С. Я. Демяновский, Е. Прокофьева, Зоол. журн., 13, 176 (1934). <sup>4</sup> В. И. Олифан, Исследования общих закономерностей в постэмбриональном развитии насекомых, Автореф. докт. диссертации, М., 1955. <sup>5</sup> Д. В. Петрова, Журн. общ. биол., 20, № 6, 483 (1959). <sup>6</sup> А. А. Передельский, Итоги науки, Биологические науки, 1, Радиобиология, 1957. <sup>7</sup> Г. Ф. Гаузе, В. В. Алпатов, Уч. зап. Московск. унив., 2, 253 (1934). <sup>8</sup> Е. Х. Золотарев, Зоол. журн., 18, 387 (1939). <sup>9</sup> К. Фридерикс, Экологические основы прикладной зоологии и энтомологии, М.—Л., 1932. <sup>10</sup> Г. Г. Шельдешова, Изв. АН СССР, сер. биол., № 4, 381 (1946). <sup>11</sup> В. Н. Никитин, Л. Н. Морозова, Уч. зап. Харьковск. унив. им. А. М. Горького, 68, 153 (1956). <sup>12</sup> Е. А. Сазонова, Уч. зап. Харьковск. унив. им. А. М. Горького, 68, 137 (1956). <sup>13</sup> Н. С. Демяновская, А. В. Сокольская, Биохимия, 8, 1 (1943). <sup>14</sup> В. Н. Никитин, Л. Н. Блок, Уч. зап. Харьковск. унив. им. А. М. Горького, 68, 117 (1956). <sup>15</sup> И. В. Кожанчиков, ДАН, 58, № 2, 345 (1947). <sup>16</sup> А. Н. Смолин, Уч. зап. Московск. пед. инст. им. В. И. Ленина, 77, 13 (1953). <sup>17</sup> Р. С. Ушатинская, Основы холодостойкости насекомых, М., 1957. <sup>18</sup> Д. М. Федотов, О. М. Бочарова, Сборн. Вредная черепашка, 3, М., 1955.

Академик АН УССР В. А. БЕЛИЦЕР и О. В. ЛОБАЧЕВСКАЯ

## ЧАСТИЧНОЕ ПРЕВРАЩЕНИЕ СУЛЬФИДРИЛЬНЫХ ГРУПП ОВАЛЬБУМИНА ВО ВНУТРИМОЛЕКУЛЯРНЫЕ ДИСУЛЬФИДНЫЕ СВЯЗИ

Сульфгидрильные группы низкомолекулярных веществ, как известно, высокореактивны и легко образуют дисульфидные связи при действии окислителей. Сульфгидрильные группы нативных белков сильно варьируют по степени реактивности, нередко они относительно инертны. Так, овальбумин,  $\beta$ -лактоглобулин и сывороточный альбумин содержат сульфгидрильные группы, способные реагировать с йодом и некоторыми другими веществами (растворимыми в неполярных средах), но не поддающиеся действию молекулярного кислорода, феррицианида и ряда других окислителей. При денатурации, когда макроструктура становится беспорядочной, сульфгидрильные группы белков приобретают высокую реактивность, они легко окисляются и принимают участие в других превращениях (см., напр., <sup>(1-4)</sup>).

Для многих реакций сульфгидрильных групп, очевидно, неблагоприятна упорядоченная макроструктура нативного белка. Можно предполагать, что сульфгидрильные группы пониженной реактивности расположены в глубине молекулы белка и экранированы различными, в частности неполярными, участками макроструктуры. Надо подчеркнуть, что экранирующие участки макроструктуры не представляют собой полной и жесткой изоляции; не лишены подвижности, способности к деформациям (см. <sup>(5, 6)</sup>), они зачастую не исключают, а лишь затрудняют реакции «замаскированных» сульфгидрильных групп. Особенно существенными макроструктурные препятствия могут оказаться для процесса образования дисульфидных связей, когда требуется контакт между двумя «замаскированными» сульфгидрильными группами. Это хорошо установлено для сывороточного альбумина. Молекула этого белка (точнее меркаптальбумина) содержит одну сульфгидрильную группу, которая не способна окисляться феррицианидом или молекулярным кислородом и окисляется йодом не до дисульфидной стадии, а, по-видимому, до стадии сульфеновой кислоты <sup>(7)</sup>. Дисульфидную форму (димер) сывороточного альбумина получить очень трудно, это удастся лишь путем окисления ртутного димера при специальных условиях <sup>(8)</sup>. Подобного рода «уединенные» сульфгидрильные группы, не склонные при окислении соединяться в S — S-группы, обнаружены в белке вируса мозаичной болезни табака <sup>(9)</sup>.

В овальбумине, где все сульфгидрильные группы «замаскированы» по отношению ко многим реактивам, имеются, как будет показано ниже, наряду с «уединенными» группами, также и такие, которые способны контактировать между собой внутри молекулы и образовывать дисульфидные связи.

Ранее нами сообщалось, что каждая из 5 сульфгидрильных групп молекулы овальбумина реагирует с одним эквивалентом йода, поэтому представлялось вполне вероятным образование дисульфидных групп <sup>(10, 11)</sup>. Для того чтобы решить, действительно ли образуются эти группы и если образуются — то в каком количестве, мы применили специфический количественный метод определения дисульфидных групп, основанный на их реакции с сульфидом. Белок — 5 раз перекристаллизованный овальбумин —

окислялся йодом, так же как и в предыдущей работе (<sup>11</sup>), в фосфатном буфере рН 7,0 при 0°. От ионов йода белок освобождался при помощи пересаживания сульфатом аммония и диализа. Непосредственно перед анализом он подвергался денатурации 8 М мочевиной при 0°. Самый анализ заключался в том, что к 30 мл раствора, содержащего белок, буфер и мочевины, прибавлялось 0,25 мл свежеприготовленного насыщенного раствора сульфита натрия; сульфгидрильные группы (предшествующие и образовавшиеся в результате расщепления дисульфидных групп сульфитом) титровались амперометрически азотнокислым серебром. Наиболее воспроизводимые и точные

Таблица 1

Число SH- и S—S-групп в 1 моле яичного альбумина

Исходный белок			После реакции 6 эквивалентами йода			После реакции с 7 эквивалентами йода		
SH	SH + S — S	S — S	SH	SH + S — S	S — S	SH	SH + S — S	S — S
5,04	6,51	1,47	1,00	4,51	3,51	0	3,39	3,39
5,00	6,90	1,90	1,00	4,51	3,51	0	3,32	3,32
5,00	6,70	1,70	1,96	4,75	3,79	0	3,52	3,52
5,04	6,70	1,66	1,03	4,88	3,85	0	3,50	3,50
5,00	6,51	1,51	1,04	4,37	3,33	0	3,39	3,39
4,98	6,57	1,59	1,02	4,50	3,48	0	3,60	3,60
5,00	6,70	1,70	1,08	4,68	3,60	0	3,60	3,60
5,04	6,51	1,47	1,07	4,50	3,43	0	3,60	3,60
4,98	6,57	1,59	1,01	4,70	3,69	0	3,50	3,50
			1,09	4,41	3,32	0	3,20	3,20
			1,12	4,40	3,28	0	3,39	3,39
			1,04	4,50	3,46			
5,02	6,63	1,61	1,04	4,56	3,52	0	3,46	3,46

результаты получались при быстром внесении небольшого избытка азотнокислого серебра, выдерживания смеси при 0° в течение 7 мин. и измерений усиления тока от дальнейшего повышения концентрации ионов серебра. В остальном определения проводились по методу Кольтгофа и Харриса (<sup>12</sup>) с модификацией, указанной в предыдущих работах (<sup>10</sup>, <sup>11</sup>). Наряду с суммой сульфгидрильных и дисульфидных групп в исследуемом белке определялись сульфгидрильные группы в отсутствие сульфита. Содержание дисульфидных групп вычислялось по разности между первым и вторым определениями. Остальные методы применявшиеся в данной работе, не отличались от ранее описанных (<sup>10</sup>, <sup>11</sup>).

Результаты определений, представленные в табл. 1, показывают, что при реакции с 6 эквивалентами йода количество SH в молекуле белка уменьшается с 5 до 1, т. е. на 4, количество S — S возрастает с 1,6 до 3,5, т. е. почти на 2. (Истинная величина прироста S — S, вероятно, составляет 2,0, а содержание S — S, достигающее при окислении 3,5, в исходном белке равно 1,5.) Так как из 6 эквивалентов йода 2 расходуется на реакцию с группой, отличной от SH, а на окисление 4 SH идет 4 эквивалента йода (<sup>10</sup>, <sup>11</sup>), то можно было бы ожидать образования максимально 2 S — S, что фактически и происходит. После реакции с 7 эквивалентами йода белок лишается всех SH-групп, но количество S — S не растет выше величины 3,5. Иначе говоря, 7-й эквивалент йода вызывает исчезновение последней SH-группы белка без образования S — S-связей.

В предыдущих работах (<sup>10</sup>, <sup>11</sup>) мы, как и другие авторы (<sup>13</sup>, <sup>14</sup>), пришли к заключению, что при окислении овальбумина йодом молекулярный вес белка не увеличивается, т. е. полимеризации, а следовательно и образования межмолекулярных S — S-связей, не происходит. Пользуясь, как и раньше, осмометрическим методом, мы проверили это положение, причем приме-

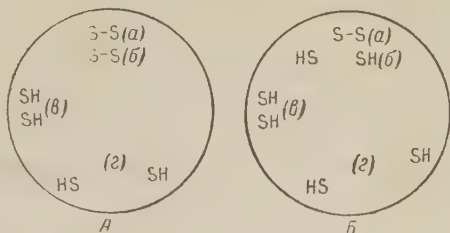
няли для окисления 7 эквивалентов йода, а не 5, как в прежней работе. Изменений молекулярного веса не найдено как и раньше. Цифровые данные будут представлены в подробном сообщении О. В. Лобачевской.

Из 5 SH-групп молекулы овальбумина 3 реагируют с йодом чрезвычайно быстро, 4-я — медленнее, 5-я — еще значительно более медленно. (Относительно высокая реактивность трех SH нативного овальбумина обнаруживается и иначе: с *n*-хлормеркурийбензоатом (<sup>15</sup>, <sup>16</sup>) и при фотоокислении в присутствии метиленовой сини (<sup>17</sup>) реагируют именно 3 SH.) Три быстроокисляющиеся сульфгидрильные группы, как мы теперь знаем, количественно превращаются в дисульфидные группы. Учитывая, что межмолекулярных связей S — S не образуется, можно заключить, что молекулы овальбумина имеют четное число быстро реагирующих SH. Нечетная средняя величина 3 не означает, что каждая молекула содержит 3 группы. При наличии 3 групп количественное превращение происходило бы с димеризацией или полимеризацией. Естественно предположить, что половина молекул содержит 4, половина 2 SH-группы. 4-я, медленно окисляющаяся, группа SH реагирует также количественно и, очевидно, образует 0,5 моля S — S. 2 SH данного типа, вероятно, находятся в одной половине молекул и отсутствуют в другой. 5-я, наиболее инертная, SH является «уединенной», и не образует дисульфидных связей. Можно предполагать, что она дополнительно окисляется кислородом воздуха (в наших опытах условия не были анаэробными) и стабилизируются, например, в виде сульфениламида.

Напомним, что окисление йодом даже части сульфгидрильных групп повышает чувствительность овальбумина к денатурирующему действию мочевины или нагревания (<sup>11</sup>, <sup>18</sup>). Ясно, что новообразование внутримолекулярных дисульфидных связей не упрочняет, а дестабилизирует макроструктуру данного белка. Можно думать, что контакт между парами SH-групп, необходимый для образования S — S-связей, достигается в активированном, частично развернутом состоянии определенных участков полипептидной цепи и связан с потерей некоторых водородных и гидрофобных связей, участвовавших в скреплении макроструктуры; выигрыш прочности от появления новой химической связи не покрывает этой потери, в макроструктуре создается напряжение.

Приведенные выше данные титрования дисульфидных групп говорят о гетерогенности овальбумина. Наличие 1,5 моля S — S на 1 моль белка, по всей вероятности, означает существование двух форм структуры, имеющих 1 и 2 S — S; 50% молекул соответствует одной, 50% — другой форме. Свидетельством гетерогенности является, далее, неравномерность распределения между молекулами белка SH-групп различной реактивности (см. выше). Пытаясь точнее представить структурные формы овальбумина, мы могли бы предположить, что каждая молекула содержит 1 S — S и 5 SH, из которых одна не способна давать S — S. Для половины молекул белка надо было бы принять наличие второй S — S группы. Однако при таком предположении приходится принять наличие двух вариантов аминокислотной цепи овальбумина: с 7 и 9 остатками полуцистина и цистеина. Это маловероятно. Овальбумин содержит одну полипептидную цепь, в которой  $\alpha$ -аминогруппа связана, а C-конец представлен структурой: вал. сер. про (<sup>19</sup>, <sup>20</sup>). Электрофосфорилирования спиртовых групп в боковых цепях белка. Интересно, что иммунохимически овальбумин представляет собой один антиген, специфичность которого определяется основной структурой полипептидной цепи и не зависит от степени фосфорилирования (<sup>21-23</sup>). Имеются, следовательно, основания для допущения, что основная последовательность аминокислот является единой для всех молекул овальбумина и что каждая молекула содержит 8 остатков полуцистина и цистеина. Если это так, то 50% молекул имеют 1 цистин и 6 цистеинов, 50% — 2 цистина и 4 цистеина. В последнем случае 2 остатка цистеина превращены в 1 остаток цистина, что представляет собой небольшую модификацию полипептидной цепи — результат окис-

ления двух ее боковых групп. Между молекулами овальбумина, имеющими 1 и 2 остатка цистина, должны существовать и макроструктурные различия, определяющие неодинаковое поведение SH-групп. Можно предложить следующую схемы, иллюстрирующую две структурные формы овальбумина (см. рис. 1). В схеме буквой *a* обозначена S — S-связь, свойственная всем молекулам данного белка, буквой *b* помечена S — S-связь структурной формы *A* и соответствующая пара SH-групп структурной формы *B*; эта пара предположительно принадлежит к числу быстро окисляемых йодом. Буквы *v* и *g* обозначают две пары SH-групп: пара *v* легко окисляется в S — S, пара *g* медленно образует S — S в форме *A* и вовсе не дает такого превращения в форме *B*. Схема интерпретирует полученные до сих пор результаты и может оказаться полезной для дальнейших исследований.



Институт биохимии  
Академии наук СССР

Поступило  
21 XII 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> M. L. Anson, *Advances Protein Chem.*, **2**, 361 (1945). <sup>2</sup> J. M. Kolthoff, A. Anastasi et al., *J. Am. Chem. Soc.*, **79**, 5102 (1957). <sup>3</sup> J. M. Kolthoff, A. Anastasi, *J. Am. Chem. Soc.*, **80**, 4248 (1958). <sup>4</sup> R. C. Warner, M. Levy, *J. Am. Chem. Soc.*, **80**, 5735 (1958). <sup>5</sup> J. Edsall, R. Maybury et al., *J. Am. Chem. Soc.*, **76**, 3131 (1954). <sup>6</sup> C. M. Kay, M. M. March, *Biochim. et Biophys. Acta*, **35**, 262 (1959). <sup>7</sup> W. L. Hughes, R. Straessle, *J. Am. Chem. Soc.*, **72**, 452 (1950). <sup>8</sup> R. Straessle, *J. Am. Chem. Soc.*, **76**, 3138 (1954). <sup>9</sup> H. Fraenkel-Conrat, *J. Biol. Chem.*, **217**, 373 (1955). <sup>10</sup> В. А. Белицер, {О. В. Лобачевская, *ДАН*, **131**, 199 (1960). <sup>11</sup> О. В. Лобачевская, *Укр. биохим. журн.*, **32**, 516 (1960). <sup>12</sup> J. M. Kolthoff, W. E. Harris, *Ind. and Eng. Chem.*, **18**, 161 (1946). <sup>13</sup> M. L. Anson, *J. Gen. Physiol.*, **25**, 355 (1942). <sup>14</sup> L. W. Cunningham, B. J. Nuenke, *J. Biol. Chem.*, **234**, 1447 (1959). <sup>15</sup> L. W. Cunningham, B. J. Nuenke, W. D. Strayhorn, *J. Biol. Chem.*, **228**, 835 (1957). <sup>16</sup> I. K. MacDonnell, R. B. Silva, R. E. Feeney, *Arch. Biochem. and Biophys.*, **32**, 288 (1951). <sup>17</sup> К. И. Коткова, Н. Н. Орловская, Т. Ф. Еневич, *Укр. биохим. журн.*, **33**, 3 (1961). <sup>18</sup> В. А. Белицер, О. В. Лобачевская, *Тез. 9-го Съезда физиологов, биохимиков и фармакологов*, **2**, 1959, стр. 42. <sup>19</sup> C. I. Niu, H. Fraenkel-Conrat, *J. Am. Chem. Soc.*, **77**, 5882 (1955). <sup>20</sup> I. Haruna, S. Akabori, *J. Biochem.*, **47**, 513 (1960). <sup>21</sup> J. Oudin, *Ann. Inst. Pasteur*, **75**, 30 (1948). <sup>22</sup> P. Grabar, *Advances Protein Chem.*, **13**, 1 (1958). <sup>23</sup> J. Durieux, M. Kaminski, *Bull. Soc. Chim. Biol.*, **38**, 1445 (1956).

В. В. ПИНЕВИЧ и Н. Н. ВЕРЗИЛИН

# ВЛИЯНИЕ ГИДРАЗИДА МАЛЕИНОВОЙ КИСЛОТЫ НА НЕКОТОРЫЕ ПРОТОКОККОВЫЕ ВОДОРОСЛИ

(Представлено академиком А. Л. Курсановым 3 XII 1960)

Гидразид малеиновой кислоты (ГМК) является эффективным ростовым веществом <sup>(1)</sup>. В последнее время накопился ряд данных о влиянии ГМК на развитие растений <sup>(2)</sup>. Чаще всего на основании многочисленных исследований ГМК относят к ингибиторам ростовых процессов <sup>(3)</sup>. Очевидно, что ГМК, как и любое другое физиологически активное соединение, может в одних концентрациях угнетать, а в других — стимулировать рост растений <sup>(4)</sup>. Наряду с изучением механизма действия ГМК на растения представляет интерес специально изучить влияние этого соединения на низшие растения, и особенно на те одноклеточные водоросли, использование которых вполне перспективно для массовой культуры.

Нами изучалось действие различных концентраций свободной ГМК на интенсивность деления клеток и накопление сухого вещества *Chlorella pyrenoidosa*.

Водоросли выращивались в литровых конических колбах, содержащих 500 мл питательной среды следующего состава (в миллиграммах на литр): мочевины 257,  $K_2HPO_4$  200,  $MgSO_4 \cdot 7H_2O$  100,  $CaSO_4$  10,  $Co(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$  0,02,  $CuSO_4 \cdot 5H_2O$  0,01,  $ZnSO_4 \cdot 7H_2O$  0,04,  $MnSO_4 \cdot 7H_2O$  1,0,  $NaBO_3$  1,4,  $(NH_4)_2Mo_7O_{24}$  0,5, ЭДТА 10,0,  $FeSO_4$  2,6. Колбы с водорослями устанавливались на специальной установке и освещались снизу люминесцентными лампами ДС-30 в течение 12 час. в сутки при освещенности в 4500 лк. Продувание осуществлялось воздухом с 5% содержанием  $CO_2$ . Температура поддерживалась в пределах 25—27°. Повторность в каждом варианте опыта восьмикратная. Интенсивность деления клеток оценивалась по их числу в 1 мл суспензии. Определение сухого веса (в расчете на колбу) производилось дважды за время опыта. Ниже приводятся типичные данные одного из многочисленных опытов. Продолжительность опыта с 21 X по 5 XI 1959 г. Засев сделан из расчета 0,018 г сухого вещества водорослей на колбу. Съем произведен 29 X и 5 XI.

Т а б л и ц а 1

Влияние ГМК на рост *Chlorella pyrenoidosa*

Концентрация ГМК, мг/л	Число клеток, млн/мл		Сухой вес, мг на колбу	
	29 X	29 X	5 XI	5 XI
0	62,8±2,9	106±3,5	267±7,4	610±21,1
10 <sup>-3</sup>	69,9±1,8	111±3,4	289±9,8	637±26,3
10 <sup>-2</sup>	105,4±8,8	140±1,9	361±4,2	709±14,0
10 <sup>-1</sup>	98,7±3,0	139±4,2	344±10,8	684±16,4
1	73,1±7,5	105±1,1	329±10,7	656±18,7
10	61,5±2,1	114±1,3	298±3,9	615±16,3

Наибольшее увеличение числа клеток и сухого вещества водорослей получено при внесении ГМК в концентрациях  $10^{-2}$  и  $10^{-1}$  мг/л. Другие использованные в опыте концентрации стимулировали рост водорослей менее эффективно.

Одновременно было изучено влияние стимулирующей концентрации ГМК в  $10^{-2}$  мг/л на фотосинтез и дыхание *Chlorella pyrenoidosa*.

Как видно из рис. 1, под воздействием ГМК имеет место возрастание интенсивности этих процессов в расчете как на колбу, так и на 1 млрд. клеток. При этом возрастание фотосинтеза и дыхания не изменяет общего характера кривых, полученных за время роста водорослей (по сравнению с контролем).

Стимулирующий эффект ГМК был проверен для представителей других родов протококковых водорослей: *Scenedesmus obliquus* и *Ankistrodesmus*

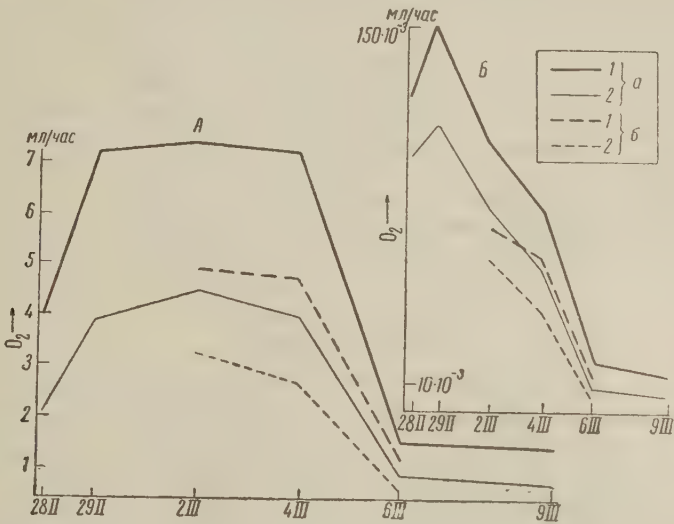


Рис. 1. Влияние ГМК на фотосинтез (а) и дыхание (б) *Chlorella pyrenoidosa*. А — в расчете на колбу, Б — в расчете на миллиард клеток. 1 — опыт, 2 — контроль

*falcatus*. В табл. 3 приведены величины сухого веса водорослей, полученные при концентрации ГМК в  $10^{-2}$  мг/л. Учет произведен в день ликвидации опыта. Условия опыта аналогичны описанным выше.

Таблица 2

Действие веществ группы ауксинов на рост *Chlorella pyrenoidosa*

Концентрация ростовых веществ, мг/л	Число клеток, млн/мл		Сухой вес, мг/л		Концентрация ростовых веществ, мг/л	Число клеток, млн/мл		Сухой вес, мг/л	
	ИУК	ИМК	ИУК	ИМК		ИУК	ИМК	ИУК	ИМК
0	85,4	670	90,1	630	$10^{-2}$	94,2	580	116,5	580
$10^{-4}$	81,9	690	105,8	603	$10^{-1}$	93,0	620	98,7	603
$10^{-3}$	94,2	590	111,7	588	1	59,6	630	73,6	621

Таким образом, ГМК в определенных концентрациях оказывает положительное влияние как на интенсивность деления клеток, так и на накопление водорослями сухого вещества. В этом отношении действие ГМК на водоросли отличается от влияния на них ростовых веществ группы ауксинов. Так, в наших опытах увеличение количества клеток под влиянием ИУК и ИМК сопровождалось снижением сухого вещества водорослей (табл. 2).

В литературе распространена гипотеза об антиауксинном действии ГМК (<sup>5</sup>, <sup>6</sup>). В настоящее время ряд данных заставляет искать другие объяснения воздействию ГМК на ростовые процессы (<sup>4</sup>, <sup>7</sup>). Однако полученные нами для водорослей результаты позволяют заключить, что: 1) механизмы, влияющие на интенсивность деления клеток и накопление ими биомассы, не одинаковы; 2) ГМК в оптимальных концентрациях стимулирует эти оба механизма, тогда как вещества группы ауксинов, ускоряя интенсивность деления клеток, тормозят дальнейшее накопление биомассы.

Таблица 3

Влияние ГМК на одноклеточные зеленые водоросли

	В миллиграммах на 1 колбу		В процентах к контролю
	контроль	опыт	
<i>Scenedesmus obliquus</i>	544	632	116
<i>Ankistrodesmus falcatus</i>	384	426	111
<i>Chlorella pyrenoidosa</i>	379	525	138

### Выводы

1. ГМК в концентрациях  $10^{-2}$  и  $10^{-1}$  мг/л оказывает стимулирующее действие на деление клеток *Chlorella pyrenoidosa* и других протококковых водорослей и на накопление ими сухого вещества.

2. Оптимальные концентрации ГМК повышают интенсивность фотосинтеза и дыхания водорослей.

3. Механизм действия стимулирующих концентраций ростовых веществ группы ауксинов на водоросли, очевидно, отличен от механизма действия ГМК, так как увеличение количества клеток под влиянием ИУК и ИМК сопровождается снижением биомассы водорослей.

Ленинградский государственный университет  
им. А. А. Жданова

Поступило  
29 XI 1960

### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Ю. А. Баскаков, Н. Н. Мельников, Хим. пром., № 3, 32 (1958).
- <sup>2</sup> Н. А. Козлова, Е. Я. Ермолаева, П. Бацка, ДАН, 130, № 1, 231 (1960).
- <sup>3</sup> L. W. Mericle, A. M. Eupus, R. P. Mericle, Bot. Gaz., 117, № 2, 142 (1955).
- <sup>4</sup> Р. Г. Бутенко, Ю. А. Баскаков, Физиол. раст., 7, в. 4, 385 (1960).
- <sup>5</sup> A. C. Leopold, W. H. Klein, Science, 114, 9 (1951). <sup>6</sup> E. K. Weygood, A. Oaks, G. A. McLachlan, Canad. J. Bot., 34, 905 (1956). <sup>7</sup> L. F. Audus, R. Thresh, Ann. Bot., 20, 434 (1955).

В. И. СВИНАРЕВ

ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ И РАЗВИТИЯ КОРНЕВЫХ СИСТЕМ  
У КУКУРУЗЫ, СОИ И АРБУЗОВ ПРИ ПОСЕВЕ ГНЕЗДОВЫМ  
СПОСОБОМ

(Представлено академиком В. Н. Сукачевым 10 IX 1960)

Вопрос о взаимодействии корневых систем в зависимости от степени загущения культур сплошного сева и числа растений в гнездах у пропашных при посеве их гнездовым способом представляет не только теоретический, но и большой практический интерес.

На важность изучения взаимоотношений и взаимосвязей между растениями в сообществах посредством корневых систем впервые обратил внимание В. Н. Сукачев (<sup>1,2</sup>). А. Л. Курсанов (<sup>3</sup>) отмечает, что в последнее время все отчетливее выявляется роль корневой системы как органа, определяющего характер внутривидовых и межвидовых отношений, которые создаются у растений в естественных биологических сообществах. Ряд исследователей считают, что мощность и характер развития корневых систем у самых разнообразных видов растений зависит от густоты стояния их в посевах. Параллельно с изменениями в развитии корневых систем изменяется также величина урожая и качество продукции (<sup>4-8</sup>).

В этой связи нами в течение 1955—1958 гг. на Камызякском опорном пункте Астраханской сельскохозяйственной опытной станции проводились исследования по изучению особенностей формирования и развития корневых систем у кукурузы, сои и арбузов в условиях орошения. В качестве подопытных сортов использовались кукуруза гибрид ВИР 42 (Кубанской опытной станции Всесоюзного института растениеводства), соя № 262 (Амурской опытной станции) и арбуз Мелитопольский 142 (Быковской селекционной опытной станции).

Наблюдения за развитием корневой системы у кукурузы и сои проводились на квадратно-гнездовых посевах при площади питания  $70 \times 70$  см и при различном числе растений в гнезде, а у арбузов на посевах, проведенном по схеме  $150 \times 200$  см при 1 и 2 растениях в гнезде. В течение вегетации растений влажность почвы поддерживалась на уровне 70—80% от предельной полевой влагоемкости почвы.

При 1 растении в гнезде у кукурузы, сои и арбузов формируется симметричная корневая система и корни равномерно распределяются в толще почвы как в горизонтальном, так и в вертикальном направлении.

При 2 растениях в гнезде у каждого из них формируется асимметричная (односторонняя) корневая система, причем корни двух рядом растущих растений друг с другом не переплетаются. В местах сближения двух растений наблюдается слабое развитие и ветвление корней (рис. 1—3). Каждое растение в гнезде «захватывает» свою сферу в почве, и масса корней системы одного растения гнезда проявляет своеобразный тропизм по отношению к корневой массе соседнего растения. Это явление названо нами фитоценологическим отрицательным тропизмом (<sup>9</sup>).

При 5—7 и более растениях в гнезде у кукурузы наблюдается разница в развитии корневых систем между растениями, находившимися в центре гнезда, и растениями, расположенными по периферии гнезда. У периферийных растений гнезда основная масса корней развивается в сторону междурядий, т. е. формируется асимметричная корневая система. На поверхности эпикотеля и подземных базальных узлах стебля, об-

ращенной внутри гнезда, корни развиваются очень слабо и вскоре после своего появления в значительной массе отмирают.

Корни растений, находящихся в центре гнезда, развиваются в сравнении с корнями периферийных растений гораздо медленнее. Число эпикотильных и узловых корней у этих растений примерно в два раза меньше, чем у растений, расположенных по периферии гнезда. Глубина проникновения корней у тех же самых растений в почву гораздо меньше, чем у периферийных растений.

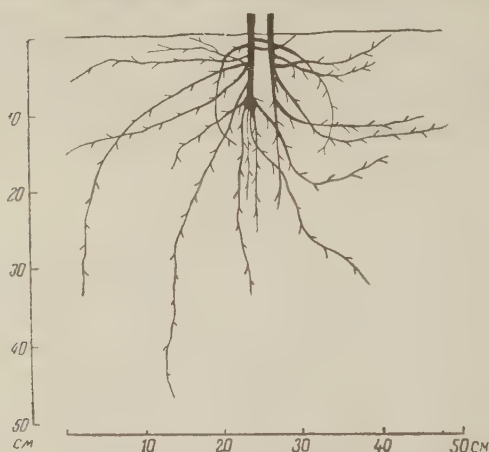


Рис. 1. Корневая система соев в фазе бутонизации при двух растениях в гнезде

Аналогичный характер развития корневых систем при гнездовых посевах и посадках установлен у древесных пород<sup>(10-12)</sup>, у овощных культур (капуста и помидоры) и горчицы<sup>(9)</sup>. Следовательно, развитие симметричной корневой системы у одиночно растущих растений и асимметричной при выращивании нескольких растений в гнездах можно считать общебиологическим явлением. Такой характер развития корней у растений выработался в процессе борьбы за существование и является одним из важных приспособительных свойств как к одиночному, так и групповому сосуществованию.

Весьма любопытные данные получены также в отношении глубины проникновения корней в почву у кукурузы в зависимости от числа растений в гнездах (табл. 1).

Приведенные в табл. 1 данные свидетельствуют о том, что с увеличением числа растений в гнездах от 1 до 4 наблюдается затормаживание роста корней, которое находит свое выражение в различной глубине их проникновения в почву. В то же время в гнездах имеет место дифференциация корней по этому показателю.

Помимо дифференциации растений в гнездах по глубине проникновения корней в почву протекает и дифференциация их по весу сырой и воздушносухой массы. Этот факт был установлен на посевах кукурузы, проведенных после спада паводковых вод на фоне без полива и с дополнительными вегетационными поливами. Поливная норма около 800 м<sup>3</sup> воды на 1 га. Посев кукурузы в этом опыте проводился квадратно-гнездовым способом по схеме 70 × 70 см. В фазе 3—5 листьев всходы были прорежены, и в каждом гнезде оставлялось по 2 растения. Уход за посевами на всех вариантах был одинаковый (табл. 2).

Дифференциация растений в гнездовых посевах по глубине проникновения корней и весу их сырой и сухой массы с увеличением степени загущения в гнездах является очень важной биологической особенностью в жизни растительных организмов, так как позволяет более рационально использовать материальные ресурсы земной поверхности и тем самым спо-

Таблица 1

Глубина проникновения (в сантиметрах) зародышевых и узловых корней в почву у кукурузы в фазе выметывания метелки в зависимости от числа растений в гнезде (по 5 гнездам)

Число расте- ний в гнезде	средн.	максималн.	№№ растений в гнезде			
			1	2	3	4
			Зародышевые корни			
Одно	72	80	72	—	—	—
Два	68	75	71,0	65,0	—	—
Три	62	73	69,2	61,4	55,4	—
Четыре	56	71	67,0	60,2	51,0	41,8
Узловые корни						
Одно	115	121	112	—	—	—
Два	108	123	123	116	—	—
Три	97	113	113	98,4	79,6	—
Четыре	85	115	110,8	101,2	73,0	57,0

способствовать процветанию вида в его борьбе за существование. Этот факт впервые был установлен Т. Д. Лысенко (14) в посевах кок-сагыза.

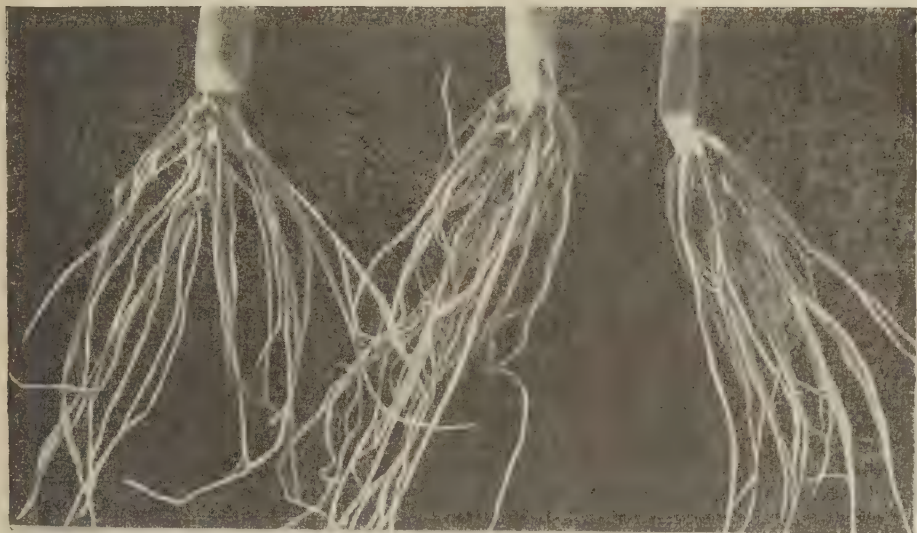


Рис. 2. Корневая система кукурузы в фазе 5—6 листьев: *а* — при 1 растении в гнезде, *б* — при 2 растениях в гнезде

Снижение интенсивности в развитии корневых систем и дифференциации их, которая наблюдается при увеличении числа растений в гнездах,

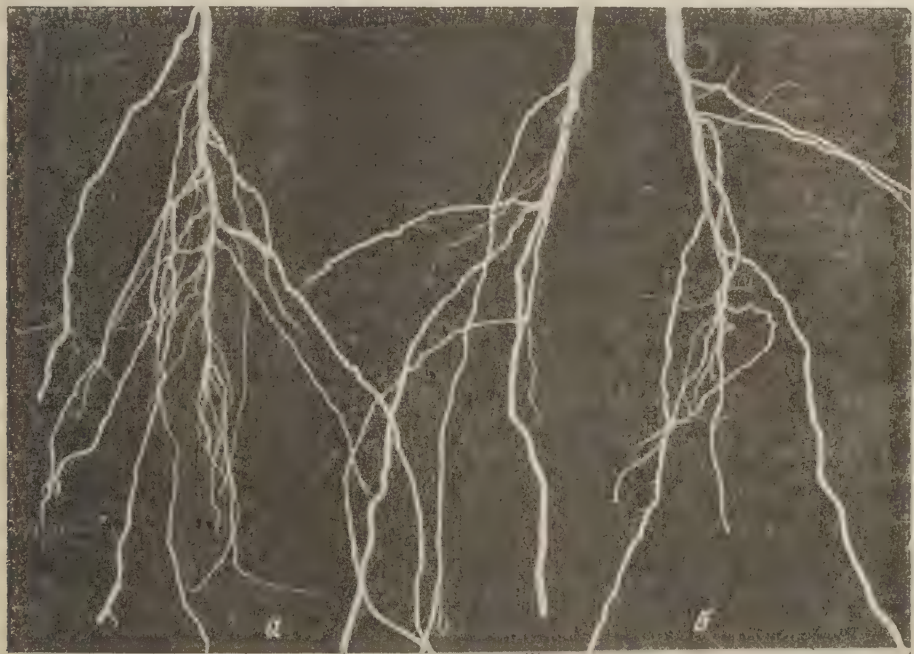


Рис. 3. Корневая система арбузов в фазе цветения: *а* — при 1 растении в гнезде, *б* — при 2 растениях в гнезде

по-видимому, обуславливается взаимным затенением надземными частями одних растений другими, а также корневыми выделениями, токсичность которых увеличивается с усилением контакта между растениями.

Вес сырой и сухой массы корней (в граммах) у растений кукурузы в пределах гнезда на различных фонах водного режима

Фон	№ расте- ния в гнезде	22 VII		21 X		12 IX	
		сырой вес	сухой вес	сырой вес	сухой вес	сырой вес	сухой вес
Без полива	1	36,0	7,3	173,0	34,0	204,0	40,7
	2	24,0	5,0	128,0	26,0	146,0	29,1
Один полив	Средн.	30,0	6,2	150,5	30,0	175,0	34,9
	1	54,0	10,7	200,4	39,9	225,0	45,0
	2	34,0	6,9	144,6	29,3	169,0	33,7
	Средн.	44,0	8,8	172,5	34,6	197,0	39,4
Два полива	1	57,0	11,7	207,0	37,4	233,6	47,6
	2	32,0	6,6	139,0	27,7	193,8	38,8
	Средн.	44,5	9,2	173,0	32,6	213,7	43,2
	Средн.	44,5	9,2	173,0	32,6	213,7	43,2

Параллельно с дифференциацией корней, которая имеет место при увеличении числа растений в гнездах, наблюдается и дифференциация растений по высоте роста (табл. 3).

Анализ табл. 3 показывает, что при 2 и 4 растениях в гнезде рост растений протекает менее интенсивно, чем при 1 растении в гнезде. Такая картина наблюдается на протяжении всей вегетации растений. В то же время при 2 и 4 растениях в гнезде одно из них имеет более высокий рост, чем другие. Аналогичный характер дифференциации наблюдается также и по другим признакам, связанных с продуктивностью растений и качеством продукции.

Таким образом, при установлении оптимального числа растений в гнездах в квадратно-гнездовых посевах нужно учитывать особенности развития и формирования

Таблица 3

Дифференциация растений кукурузы гибрида ВИР 42 по высоте в зависимости от числа растений в гнезде (в сантиметрах)

№ растений в гнезде	20 VI	27 VI	3 VII	12 VII	20 VII	1 VIII	6 VIII
При одном растении в гнезде							
1	144,9	83,2	110,8	158,4	235,3	261,5	261,9
При двух растениях в гнезде							
1	45,5	79,5	111,4	154,8	203,4	259,3	260,2
2	37,9	67,4	86,2	132,9	204,0	233,5	237,5
Средн.	41,7	73,4	98,6	143,8	203,7	246,4	248,8
При четырех растениях в гнезде							
1	45,3	70,6	99,0	147,9	229,9	275,3	278,2
2	41,1	65,1	86,7	132,3	210,1	256,8	256,8
3	36,9	60,1	76,4	119,0	190,9	233,8	242,3
4	31,6	55,5	62,9	104,0	160,8	216,5	216,8
Средн.	38,7	62,8	81,2	125,8	197,9	245,6	248,5

корневых систем при этом типе насаждения.

Поступило  
9 IX 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Ф. В. Быстриков, Тр. по прикл. бот., ген. и сел., 27, в. 5 (1931). <sup>2</sup> В. Н. Сукачев, Бот. журн. СССР, 38, № 1 (1953). <sup>3</sup> А. Л. Курсанов, Природа, № 7, 21 (1954). <sup>4</sup> Н. J. Dittmer, Am. J. Bot., 24 (1937). <sup>5</sup> Т. К. Pavlyuchenko, Ecology, 18 (1937). <sup>6</sup> И. В. Красовская, Тр. по прикл. бот., ген. и сел., 22 1 (1929). <sup>7</sup> В. В. Бушман, Соц. зерн. хоз., № 4 (1940). <sup>8</sup> Л. Н. Знаменский, Соц. зерн. хоз., № 3 (1940). <sup>9</sup> Д. Д. Баев, Вест. с.-х. науки, техн. культ., № 5 (1940). <sup>10</sup> В. И. Свиначев, Бюлл. МОИП, отд. биол., № 5 (1955). <sup>11</sup> Д. А. Корякин, Лесн. хоз., № 5 (1953). <sup>12</sup> Б. Остапенко, Лесн. хоз., № 6 (1953). <sup>13</sup> В. И. Рубцов, Бот. журн. СССР, № 3 (1954). <sup>14</sup> Г. Д. Лысенко, Агробиология, М., 1949.

П. М. МАЖУГА

**ПЛАСТИЧНОСТЬ КРОВЕНОСНОГО РУСЛА  
СИНОВИАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ В СВЯЗИ С РАЗЛИЧНОЙ  
ФУНКЦИЕЙ СУСТАВОВ**

(Представлено академиком Ю. А. Орловым 23 XI 1960)

При значительном общем сходстве в гистологическом строении синовиального покрова суставов млекопитающих, даже среди представителей одного вида в этом покрове отмечаются существенные морфологические особенности. Количество и форма ворсин и складок на синовиальной оболочке, размеры и форма жировых тел, концентрация кровеносных сосудов в определенных зонах синовиальной оболочки, т. е. признаки, объединяемые под рубрикой реактивных структур, часто характеризуют состояние синовиального покрова данного индивида.

Известно, что синовиальные ворсины и складки не являются преформированными образованиями. Их появление, развитие и инволюция находятся в зависимости от динамической нагрузки на сустав (<sup>1</sup>), однако назначение ворсин и складок, их роль в биомеханике сустава остается загадочной, равно как и недостаточно ясна истинная природа производных синовиальной оболочки. Поскольку эти две стороны явлений взаимосвязаны, они требуют совместного разрешения.

Как и в других средах и тканях организма, в полости сустава происходит непрерывный обмен, интенсивность которого зависит от активности работы данного сочленения.

Постоянный обмен в суставной полости обеспечивается посредством активной поверхности, которая представлена системой сосудов синовиальной оболочки совместно с синовиальным покровом. На усиленную динамическую нагрузку в суставе синовиальная оболочка отвечает формированием ворсин, аркад, складок (<sup>1-3</sup>), размеры и количество которых всегда определяются продолжительностью и интенсивностью работы сустава.

Упомянутые производные синовиальной оболочки (ворсины, складки и пр.), как показали наши исследования, представляют собой не что иное, как выросты кровеносного сплетения синовиального покрова, появляющиеся



Рис. 1. Кровеносные сосуды производных синовиальной оболочки: а — синовиальной складки, б — синовиальной ворсины. Микрофото

в ответ на длительный адекватный раздражитель (рис. 1). Таким образом достигается увеличение активной поверхности и, следовательно, повышение интенсивности в нем обменных процессов соответственно возросшей рабочей нагрузке. Иными словами, в данном случае выступает обычное явление количественной адаптации — ответное усиление организмом структуры в связи с повышением функции <sup>(4)</sup>.

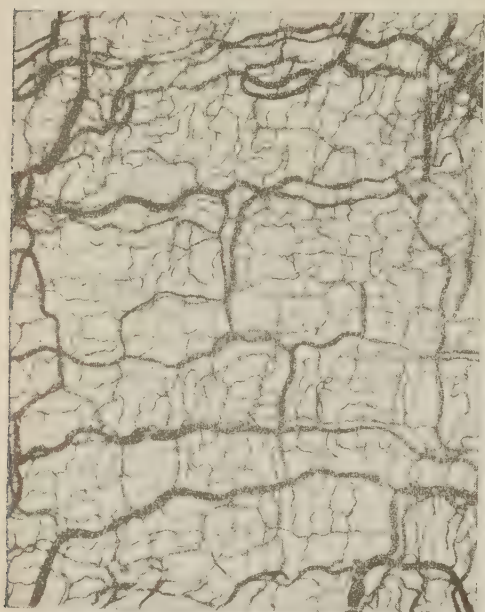


Рис. 2. Система сосудов задне-наружного отдела капсулы локтевого сустава телят. Микрофото

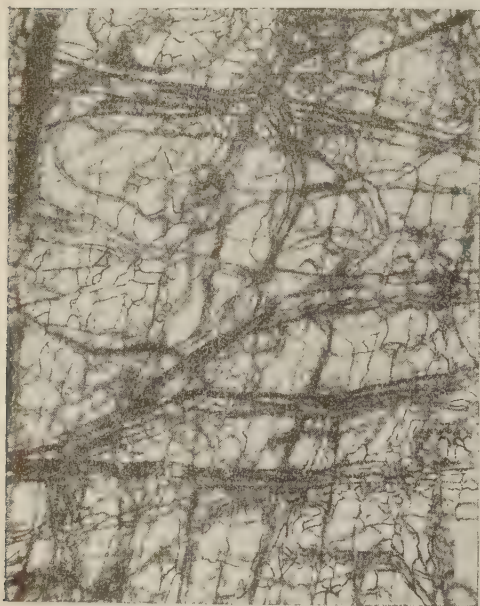


Рис. 3. Система сосудов переднего отдела запястного сустава телят. Микрофото

отрицательного давления в полости сустава <sup>(7)</sup>, что и наблюдается в действительности.

\* Упоминание некоторых авторов <sup>(1)</sup> о ворсинах без сосудов основывается, по-видимому, на недостаточно полной инъекции кровеносного русла окрашенными взвешями.

Непосредственным раздражителем, действующим на активную поверхность сустава, является, надо полагать, движение в суставе, поскольку наиболее густое сплетение сосудов и наибольшая концентрация его выростов в виде ворсин и складок отмечается в местах, где синовиальные покровы соприкасаются друг с другом и испытывают трение во время движений, или там, где синовиальная оболочка непосредственно прилегает к смещающимся суставным поверхностям.

Подобно тому как в хрящевых эпифизах костей процессу оксстения предшествует активная сосудистая реакция, в синовиальном покрове появлению ворсин предшествует пролиферация сосудистого клубочка, который растет в полость сустава и выпячивает на себе синовиальный покров. Следовательно, активным элементом синовиальных ворсин и складок является как и в ряде других органов, специфическое сосудистое образование, построенное по типу замкнутого сплетения \*. Мнение Шаффера и др., считающих, что клетки синовиальной оболочки способны к секреторной деятельности, окончательно опровергнуто другими исследователями <sup>(5)</sup>.

В связи с тем, что активная поверхность сустава обладает большой реактивной пластичностью, ее морфологическая картина (густота сосудистого сплетения, количество ворсин и др.) в каждом случае будет определяться функциональным состоянием сустава, а не его формой <sup>(6)</sup> и не величиной

Закономерность эта проявляется как в онтогенезе, так и в сравнительно-анатомическом ряду позвоночных. Естественно поэтому, что у малоподвижных животных с непостоянной активностью (земноводные, черепахи) синовиальные ворсины в суставах конечностей, как правило, отсутствуют, они слабо выражены у малоподвижных млекопитающих, и, по данным Каллистова и Щеголькова, количество ворсин сильно варьирует в суставах представителей одного и того же вида в зависимости от состояния физической активности.

На многочисленных препаратах плечевого, локтевого, запястного, коленного суставов и суставов пальцев животных и человека мы исследовали строение кровеносной системы суставной сумки и изменение архитектоники кровеносного русла этого органа в пренатальном онтогенезе. С этой целью была применена инъекция кровеносных сосудов черной тушью, изготовление просветленных препаратов с капсулы сустава и с отдельных ее оболочек с последующим изучением их с помощью стереоскопической лупы. При этом анализ строения кровеносной системы капсулы производился с учетом особенностей динамики в каждом отделе сустава. Данные исследования показывают, что условия биомеханики сустава сказываются определенным образом не только на морфологической картине активной поверхности сустава,

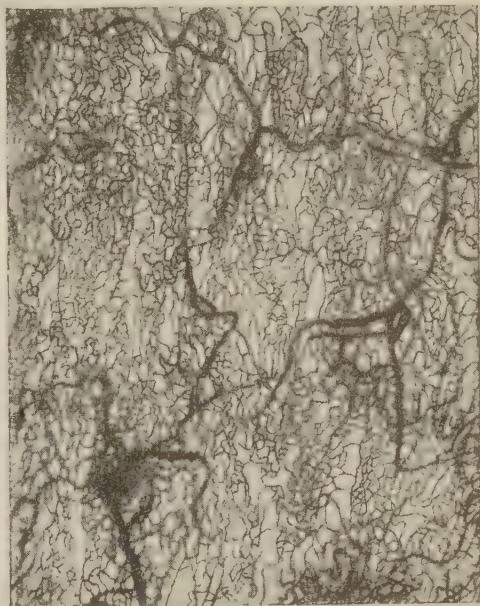


Рис. 4. Система сосудов синовиального выворота локтевого сустава телят. Микрофото

ва, но также и на структуре всего кровеносного русла его капсулы. Хотя в каждом случае кровеносное русло капсулы представлено замкнутой системой сосудов, построенной по типу сплетения, тем не менее строение этого сплетения в каждой зоне сустава отличается большим разнообразием. Это прежде всего касается направления и концентрации сосудов в отдельных участках сплетения. В тех местах капсулы, где действуют силы одностороннего натяжения, система ее сосудов напоминает систему сосудов связок и сухожилий. В ней преобладают параллельно идущие стволы, расположенные в направлении действия силы натяжения. Основные сосудистые стволы при этом соединены между собой короткими поперечными анастомозами. Если капсула во время движений в суставе испытывает натяжение в двух взаимноперпендикулярных направлениях, ее внутриорганные кровеносные сосуды, вплоть до капиллярных сетей, располагаются по квадратам, величина которых зависит от калибра образующих квадраты сосудов (рис. 2).

В ряде суставов ткани капсулы в отдельных ее участках испытывают попеременное натяжение в различных направлениях. Как правило, в таких местах система сосудов капсулы, в том числе и ее синовиальной оболочки, представлена в виде многослойной полигональной сети, размеры ячеек и калибр сосудов в которой также находятся в прямой взаимозависимости. В местах, где капсула испытывает давление извне от прилежащих сухожилий и мышц, например на передней поверхности запястного сустава, сосуды в ее стенке расположены в виде широких пучков, включающих по 4 — 5 параллельно идущих стволов (рис. 3). В синовиальных выворотах, объем которых периодически меняется вследствие перемещения синовия при движениях в суставе, кровеносное сплетение сформировано извитыми (волнисты-

ми, штопорообразными) сосудами, как бы располагающими запасом нарастание в длину; сплетение также имеет вид многослойной полигональной сети (рис. 4). В синовиальных складках, ворсинах и жировых телах кровеносная система представлена наиболее густым ажурным сплетением сосудов примерно одинакового калибра без четко определенного их направления.

Таким образом, архитектоника кровеносного русла капсулы сустава и ее производных, так же как и морфология других макро- и микроструктур, находится в тесной связи с условиями функционирования органа. Перестройки кровеносного русла синовиальной оболочки, выражающиеся в разрастании и инволюции его отдельных частей, в условиях смены интенсивности функционирования питаемого органа, являются одним из проявлений высокой пластичности кровеносной системы вообще, четко реагирующей на все состояния организма.

Институт зоологии  
Академии наук УССР

Поступило  
19 XI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> И. П. Каллистов, Волокнистая конструкция и реактивные структуры синовиальной оболочки коленного сустава, Докт. диссертация, 1946. В. Н. Павлова, ДАН, 84, № 5, 1057 (1952). <sup>3</sup> А. Н. Щегольков, Тр. XI конфер. Киевск. инст. физической культуры, 1959. <sup>4</sup> St. Krompacher, Zs. mikr.-anat. Forsch., 64, № 1, 59 (1958). <sup>5</sup> С. И. Щелкунов, Тр. Военно-мед. акад. им. С. М. Кирова, 24 (1940). <sup>6</sup> Н. А. Иконникова, Тр. Ижевского мед. инст., 13, 221 (1951). <sup>7</sup> В. Гаген-Торн, Развитие и строение синовиальных оболочек, Диссертация, СПб, 1883.

ЭВОЛЮЦИОННАЯ МОРФОЛОГИЯ

В. Д. ИЛЬЧЕВ

К МОРФОЛОГИИ И ФУНКЦИИ ЛИЦЕВОГО ДИСКА ПТИЦ

(Представлено академиком Ю. А. Орловым 23 XI 1960)

Лицевой диск (*limbus facialis*) — одна из интересных и малоизученных деталей морфологии птиц, функция которой неясна. Это, в первую очередь, — результаты недостатка морфологических сведений. Авторы систематических работ нередко принимают лицевой диск за «филогенетический» признак, не обладающий самостоятельной функцией и коррелятивно связанный с фронтальным уплощением черепа. Имеются попытки рассматривать лицевой диск в качестве видового опознавательного признака.

Лицевой диск совы *Strix aluco* (рис. 1) образует несколько рядов перьев специальной структуры, располагающихся кпереди и каудально от ушного отверстия. По переднему краю переднеушной складки растет перо, отличающееся жестким разреженным опахалом, длинным, утолщенным очинком, слабо изогнутым стержнем. Ряды переднеушного пера располагаются близко один к другому. С удалением от ушного отверстия в оральном направлении очины укорачиваются, стержни становятся более изогнутыми и утончаются, — перо приобретает структуру обычного контурного пера. Переднеушная складка снабжена специальной мускулатурой и подвижна, что позволяет птице в нужный момент раздвигать диск, обнажая отверстие<sup>(2,3)</sup>. Жесткое перо диска противостоит встречным воздушным потокам, отверстие может оставаться обнаженным и во время полета. Отгибание переднеушной складки увеличивает звукоулавливающую поверхность наружного уха и расширяет базу при бинауральном эффекте.

Задний отдел лицевого диска представлен пестро пигментированным пояском из сомкнутых дистальных отделов заднеушных перьев, растущих по каудальному краю ушного отверстия. Благодаря сомкнутости опахал, частому расположению и особенностям пигментации пояска напоминает ряд своеобразных «чешуй», резко отличаясь по структуре от разреженного и жесткого переднеушного пера и от контурного пера обычной структуры. Перья этого отдела имеют дистально расширяющееся опахало, двойной вентральный перегиб в дорсовентральной плоскости, их очины растут под прямым углом к поверхности кожи. Опахало изогнуто в вентральном направлении дважды (рис. 2). Плотность дистальных отделов опахал значительно повышает звукоулавливающие качества лицевого диска. Двойная дорсовентральная изогнутость опахал заднеушных перьев создает характерный рельеф каудального отдела диска — впадину в медиальной части и высокий латеральный валик, функционально являющийся аналогом завернутого и сглаженного края ушной раковины некоторых хорошо слышащих млекопитающих.

Лицевой диск известен для многих отрядов птиц (*Psittaci*, *Striges*, *Caprimulgi*, *Accipitres*). Существенно, что наиболее выраженным лицевым диском обладают те виды, которые имеют хорошо развитый слух. Для многих из них экспериментально доказана максимальная известная для птиц

чувствительность слухового аппарата (5). Большинство из них — ночные виды.

Биологическое значение слуха при ночном образе жизни особенно велико. В ряде случаев у ночных птиц слуховой анализатор становится ведущим и развит даже в большей степени, чем зрительный. Среди дневных видов развитым диском обладают мелкие луны — облигатные мышееды по характеру питания. Эти луны ловят грызунов в густых зарослях травянистой и кустарничковой растительности. Охотясь, хищники низко, на бредущем полете, летают над зарослями, и успех охоты зависит от быстроты реакции — от способности птицы быстро и точно ориентироваться в пространстве. Специфические условия охоты (густые, плохо и с трудом просматриваемые заросли, бредущий полет) предъявляют высокие требования к развитию слухового анализатора, как наиболее полезного в данной ситуации.

Вместе с тем, болотный лунь (*Circus aeruginosus*) — орнитофаг болотистых биотопов и тростниковых зарослей, пользующийся во время охоты преимущественно зрением и в силу особенностей охоты не нуждающийся в остром слухе, имеет слабо намеченный лицевой диск, почти не развитый. Полностью развитый лицевой диск встречается у видов с обостренным слухом. Появление лицевого диска в ряде случаев сопровождается развитием дополнительных околоушных структур, усиливающих звукоулавливающие, звукоорганизующие возможности наружного уха птиц. Такими образованиями являются околоушные складки и валики, — как давно замечено, играющие большую роль в аппарате наружного уха сов (4). Наибольшего развития эти складки достигают у представителей родов *Asio*, *Strix*; показательно, что они характеризуются и наиболее развитым лицевым диском. У мелких луней вентрально и впереди от ушного отверстия располагаются две невысокие складки на расстоянии 11 мм

Рис. 1. Лицевые диски с отогнутым переднеушным отделом. а — серая неясыть, б — степной лунь, в — ушастая сова

одна от другой. Между складками не растет перо, в результате чего образуется участок голой кожи. Перья, растущие по передней и задней складкам образуют лицевой диск луны, в схеме напоминающий лицевой диск сов. При отгибании переднеушного пера образуется широкая воронка, имеющая верхнеоральную направленность. Благодаря этому звукоулавливающие возможности уха многократно возрастают. У болотного луны складки

относительно менее выражены, голый участок кожи относительно меньше и отделен от отверстия пером.

Другая категория доказательств акустического значения лицевого диска касается степени его развития внутри биолого-анатомического ряда: насекомоядные, сумеречные и дневные совы — облигатные ночные мышеядные совы. Аналогичную картину показывает и такой ряд: равнинные и степные совы — совы таежных лесов. Оба ряда открываются видами со слабо выраженным или почти не выраженным лицевым диском, неразвитыми складками, относительно небольшим отверстием — признаками слабо развитого слуха. Оба ряда завершают виды с развитым диском, высокими складками, большим отверстием — признаками обостренного слуха. Имеющиеся физиологические данные подтверждают значительное развитие слуха у последних (5). Это понятно. Мышеядным и ночным видам слух более необходим сравнительно с видами, охотящимися за насекомыми в условиях хорошего освещения, где большую роль играет развитое зрение. В лесу, в обстановке закрытых местообитаний, условия распространения звука, (а значит и восприятия) хуже, чем на равнине, где нет препятствий распространению звука, он распространяется более прямолинейно, без отражений, с меньшими потерями интенсивности. Совы фауны СССР дают в этом отношении довольно наглядную картину. Лицевой диск почти не развит у *Ninox*, слабо развит у *Otus*, *Glaucidium*, *Athene*, *Nyctea*. Далее идут *Aegolius*, *Surnia*. Значительного развития диск достигает у *Bubo*, *Asio*. Наиболее развитым диском обладают неясыти (*Strix*). У некоторых тропических сов диск также развит слабо (4). Степень выраженности лицевого диска во

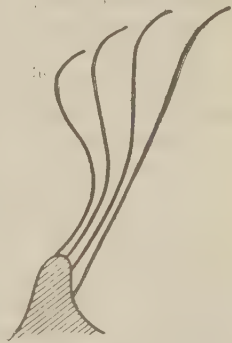


Рис. 2. Поперечный разрез заднеушной складки серой неясыти. Отчетливо видна двойная дорсовентральная изогнутость перьев (профиль)

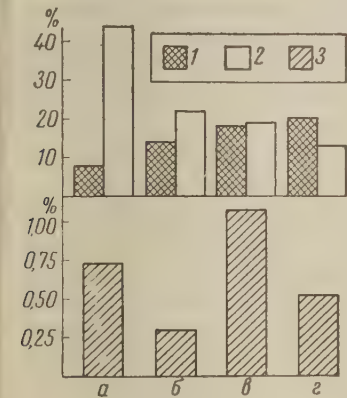


Рис. 3. Особенности строения переднеушного пера лицевого диска ушастой совы (а), домового сыча (б), степного луя (в) и болотного луя (г). 1 — высота сегмента пера (профиль), 2 — длина очина, 3 — расстояние между очинами (в % к длине пера)

многом зависит от микроструктуры перьев, его образующих, как видно на рис. 3 и в табл. 1. Как общее явление наблюдается следующая картина. Наиболее развитый лицевой диск (*Strix*) характеризуется переднеушными перьями с относительно увеличенными очинами, утолщенными стержнями, разреженным опахалом с жесткими бородачками. В заднеушном перье наблюдается увеличение плотности опахала, сближение бородок, увеличение угла отхождения лучей, появление двойного дорсовентрального перегиба стержня.

Все сказанное позволяет рассматривать лицевой диск как акустическое образование (при возможной полифункциональности). За счет лицевого диска увеличивается поверхность наружного уха, расширяется база при бинауральном эффекте. У млекопитающих такого рода задачи решаются образованием кожного-хрящевой раковины, у птиц — с помощью пера и складок кожи, т. е. чисто «птичьими» возможностями. И потому есть все основания видеть в лицевом диске и околоушных складках птиц аналог наружного уха млекопитающих.

В этом отношении особенно интересен недавно опубликованный физиологический эксперимент. Сова с прижатым лицевым диском летела в направлении пробегающей мыши, но определить, на каком расстоянии от нее находится мышь, не могла. С открытым «ухом» ей это лег-

Таблица 1

Микроструктурные особенности переднеушного пера дневных и ночных видов сов  
(размеры в миллиметрах)

	Ninox	Otus	Surnia	Athene	Aegolius	Asio	Strix
Базальная часть опахала							
Ширина опахала бородки	0,03	0,08	0,06	0,07	0,04	0,07	0,01
Толщина ствола опахала	0,2	0,3	0,3	0,2	0,4	0,5	0,4
Толщина стержня бородки	0,02	0,02	0,07	0,03	0,03	0,8	0,2
Расстояние между стержнями	0,1	0,1	0,18	0,1	0,36	0,1	0,1
Расстояние между лучами							0,02
Центральная часть опахала							
Ширина опахала бородки	0,04	0,08	0,09	0,07	0,2	0,1	0,09
Толщина ствола опахала	0,13	0,13	0,13	0,15	0,2	0,21	0,2
Толщина стержня бородки	0,02	0,03	0,03	0,02	0,03	0,04	0,02
Расстояние между стержнями	0,3	0,3	0,24	0,1	0,3	0,1	0,13
Расстояние между лучами		0,006			0,012		0,006
Длина луча		0,3			0,46	0,39	0,39
Апикальная часть опахала							
Ширина опахала бородки	0,05	0,08	0,09	0,1	0,08	0,08	0,06
Толщина ствола опахала	0,06	0,02	0,03	0,06	0,03	0,03	0,03
Толщина стержня бородки	0,03	0,02	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01
Расстояние между стержнями	0,26	0,15	0,3	0,2	0,3	0,1	0,2
Расстояние между лучами	0,006						0,004
Длина луча	0,4	0,2	0,5	0,43	0,3	0,5	

ко удавалось <sup>(5)</sup>. Опыт проводился в темноте, что исключало включение зрительного анализатора.

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

Поступило  
23 XI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> H. Böker, Einführung in die vergleichende biologische Anatomie der Wirbeltiere, 2, 1937. <sup>2</sup> L. Freund, Zool. Anz., 66, 9 (1926). <sup>3</sup> H. Freye, Zs. d. Martin. L. Univ., Halle — Wittenberg, H. 5, № 3 (1952—1953). <sup>4</sup> L. Plate, Allgem. Zoologie und Abstammungslehre, Teil 2, Jena, 1924. <sup>5</sup> J. Schwartzkopff Fortsch. Zool., 12 (1960).

Г. А. НАСЛЕДОВ

**ВЛИЯНИЕ СИМПАТИЧЕСКОГО НЕРВА НА ПОТЕНЦИАЛЫ  
ДВИГАТЕЛЬНОЙ КОНЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ**

(Представлено академиком В. Н. Черниговским 12 XI 1960)

В 1923 г. Л. А. Орбели<sup>(1)</sup> и А. Г. Гинецинский<sup>(2)</sup> установили, что раздражение симпатического нерва вызывает увеличение работоспособности утомленной скелетной мышцы лягушки. В последующем ряд авторов (<sup>(3-5)</sup> и др.) пришли к выводу, что на функциональное состояние мышцы влияет тот адреналин (или норадреналин), который при раздражении симпатического нерва выделяется как медиатор в стенках мышечных кровеносных сосудов.

Большинство исследователей считают, что в основе симпатического эффекта лежит облегчение передачи возбуждения с нерва на мышцу (<sup>(3, 4, 6, 7)</sup> и др.). Этот взгляд нашел свое подтверждение в работе Хуттера и Левенштейна<sup>(8)</sup>, которые при помощи микроэлектродной техники установили, что раздражение симпатического нерва вызывает небольшое (до 10%) увеличение потенциалов двигательной концевой пластинки (п. к. п.). По мнению авторов, это связано с тем, что симпатический нерв повышает чувствительность синаптической зоны мышечного волокна к ацетилхолину, выделяемому окончаниями двигательного нерва.

Нами ранее было показано<sup>(9)</sup>, что симпатический эффект отчетливее проявляется в процессе ритмического раздражения двигательного нерва. В настоящей работе исследуется вопрос, какое значение имеет интервал между двигательными импульсами для проявления симпатического влияния на величину и латентный период п. к. п. При этом имеется в виду, что п. к. п. является важным показателем функционирования синаптической передачи.

Опыты проводились на нервно-мышечном препарате портняжной мышцы травяной лягушки. Двигательные спинномозговые корешки раздражались парными стимулами с интервалами между ними от 1 до 30 мсек. при частоте подачи 4 пары в 1 сек. и длительности каждого стимула около 10 мсек. От другого генератора производилось раздражение пограничного симпатического ствола стимулами частотой 12 в 1 сек. при длительности каждого стимула 30 мсек.

Биотоки отводились от мышечного волокна из области концевой пластинки внутриклеточным микроэлектродом и после усиления фотографировались с экрана катодного осциллографа. Микроэлектроды были заполнены 3 М КСl и имели сопротивление от 2 до 7 Мом.

Порядок проведения опыта был следующим. В начале редким ритмическим раздражением двигательных корешков производилось предварительное утомление мышцы до тех пор, пока ее сокращения не становились лишь едва заметными под микроскопом или прекращались совсем. Это было необходимо для того, чтобы иметь возможность наблюдать симпатический эффект усиления, который, как известно, проявляется в условиях утомления, а также и для того, чтобы при помощи микроэлектрода было возможно отводить п. к. п., не осложненные мышечными спайками и сокращениями. После этого раздражающие парные стимулы подавались на двигательные корешки сериями длительностью по 12 сек. с промежутками между сериями по

30 сек. и производилась регистрация потенциалов. Через несколько серий в течение 1,5 или 2 мин. раздражалась симпатическая цепочка. При этом стимуляция двигательных корешков и регистрация отводимых потенциалов продолжалась с прежними интервалами. Раздражение отдельными сериями производилось для того, чтобы в промежутках между ними препарат успевал достаточно отдохнуть. Иначе во время опыта, продолжающегося часто до 10 мин., такие факторы, как утомление или усвоение ритма, могли бы оказывать большее влияние, чем раздражение симпатического нерва.

При раздражении двигательного корешка парными стимулами с очень коротким интервалом между ними п. к. п. появляется лишь в ответ на 1-й стимул, а в ответ на 2-й стимул потенциал отсутствует вследствие наличия

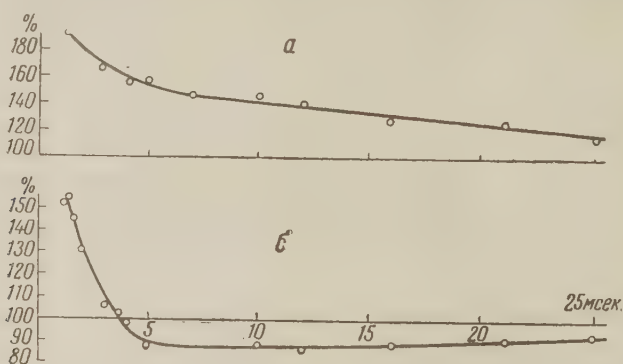


Рис. 1. Размеры 2-го потенциала (а) и величина его латентного периода (б) в процентах по отношению к соответствующим характеристикам 1-го потенциала — при различных интервалах между 1-м и 2-м импульсами

абсолютной рефрактерной фазы. 2-й потенциал появляется при раздвигании стимулов на время, превышающее 1,2 мсек. Эта величина совпадает с наименьшим значением абсолютной рефрактерной фазы, указанным для нервных волокон лягушки Эрлангером, Гассером и Бишопом (<sup>10</sup>). В других опытах эта величина доходила до 2,5 мсек., а иногда и до еще большей величины. Такие же цифры даны в работе П. Г. Костюка (<sup>11</sup>).

На рис. 1а видно, что в момент своего появления после рефрактерности 2-й потенциал имеет максимальные размеры, а при раздвигании стимулов постепенно уменьшается. Полученная кривая в основном соответствует результатам, приведенным другими авторами, например Лундбергом и Квиллишем (<sup>12</sup>).

Латентный период 1-го потенциала для каждого опыта представляет собой весьма постоянную величину, но колеблется в разных опытах. В среднем латентный период имел длительность 3 мсек. Столь большая его длительность (по (<sup>13</sup>) он составляет 1,5 мсек.), по-видимому, связана с сильным предварительным утомлением мышцы.

Латентный период 2-го потенциала при малых интервалах между стимулами, как уже описано Каффлером (<sup>14</sup>), значительно превышает таковой 1-го потенциала.

При более длинных интервалах он становится равным, а потом даже короче латентного периода 1-го потенциала (рис. 1б).

Интересно, что в каждом опыте есть диапазон интервалов (1,2—3,5 мсек.), при которых имеет место явление, кажущееся парадоксальным: с одной стороны, максимально увеличены размеры 2-го потенциала, а с другой — удлинены по сравнению с нормой его латентный период.

В результате раздражения симпатического нерва величина 1-го потенциала не изменяется закономерно, хотя в некоторых опытах потенциал увеличивается, а в других — уменьшается.

Как видно и рис. 2, при небольших интервалах между двигательными стимулами (до 10—11 мсек.), как правило, раздражение симпатического нерва вызывает уменьшение величин 2-го потенциала. Начиная с интервала 12—13 мсек. в большинстве случаев 2-й потенциал увеличивается, и это увеличение прослеживается до 30-миллисекундного интервала (рис. 2).

Изменение величины 2-го потенциала обычно наблюдается по прошествии латентного периода в 30—90 сек. после начала раздражения симпатического нерва. Самое значительное уменьшение 2-го потенциала в наших опытах доходило до 30%, а увеличение — до 20%. Однако чаще это изменение было меньшей величины.

При рассмотрении измерений латентных периодов 1-го и 2-го потенциалов вследствие раздражения симпатического нерва получены следующие данные.

На латентный период 1-го потенциала это раздражение не оказывает существенного влияния. Латентный период 2-го потенциала при раздражении симпатического нерва претерпевает определенные изменения, которые зависят от интервала между 1-м и 2-м стимулами. В тех случаях, когда этот интервал невелик и находится в пределах 5,0—5,5 мсек., в большинстве опытов раздражение симпатического нерва вызывает удлинение латентного

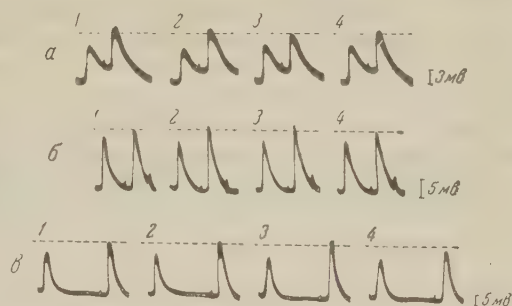


Рис. 2. Влияние раздражения симпатического нерва на величину 2-го п. к. п. при разных интервалах между стимулами: а — 6 мсек., б — 12 мсек., в — 25 мсек.; 1 — до раздражения симпатического нерва, 2 — во время раздражения, 3, 4 — после окончания раздражения симпатического нерва

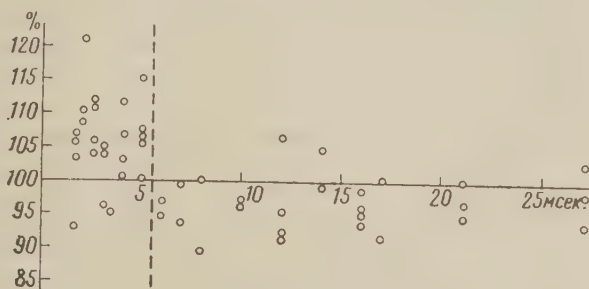


Рис. 3. Максимальное изменение латентного периода 2-го потенциала после раздражения симпатического нерва — в процентах к его величине до раздражения — при разных интервалах между 1-м и 2-м стимулами

периода. Когда интервал больше 6 мсек., в тех же условиях обычно происходит укорочение латентного периода 2-го потенциала (рис. 3). Большой разброс полученных отклонений не позволяет говорить о средних величинах этого отклонения для конкретных значений интервала между стимулами. Имеют место отдельные исключения. Тем не менее на графике видно, что большинство точек в области до 6 мсек. лежит выше нулевой линии, а после того — ниже.

Измерения длительности рефрактерного периода показали, что раздражение симпатического нерва не оказывает на него заметного влияния.

Результаты опытов позволяют сделать заключение, что раздражение симпатического нерва сказывается на величине п. к. п. и на их латентном периоде по-разному, в зависимости от интервала между двигательными сти-

мулами. Если они следуют очень быстро один за другим, то симпатический нерв оказывает отрицательное влияние на п. к. п., которое выражается в уменьшении их амплитуды и увеличении латентного периода. Если двигательные стимулы следуют с достаточным интервалом (например, 12 мсек.), то симпатический нерв оказывает на п. к. п. положительное влияние.

Л. А. Орбели (<sup>15</sup>) под адаптационно-трофическим влиянием симпатического нерва понимал влияние регулирующее. Результаты наших опытов, очевидно, представляют пример отрицательного влияния симпатического нерва на нервно-мышечную передачу в случае, когда слишком короткие интервалы между импульсами создают неблагоприятные условия для осуществления нервно-мышечной передачи. Вместе с тем, положительное влияние симпатического нерва выявляется лучше всего тогда, когда имеет место ритмическое раздражение двигательного аппарата с оптимальными интервалами между стимулами.

Институт эволюционной физиологии  
им. И. М. Сеченова  
Академии наук СССР

Поступило  
4 XI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Л. А. Орбели, Изв. Петроградск. научн. инст. им. Лесгафта, **6**, 187 (1923).  
<sup>2</sup> А. Г. Гиневинский, Русск. физиол. журн., **6**, 139 (1923). <sup>3</sup> А. Г. Гиневинский, Русск. физиол. журн., **9**, 99 (1926). <sup>4</sup> A. B. Corkill, O. W. Tiegs, J. Physiol., **78**, 161 (1933). <sup>5</sup> E. Bülbring, J. H. Burn, J. Physiol., **95**, 203 (1939). <sup>6</sup> В. В. Стрельцов, Русск. физиол. журн., **9**, 427 (1926). <sup>7</sup> Г. В. Гершун, Русск. физиол. журн., **10**, 393 (1927). <sup>8</sup> O. F. Hutter, W. R. Loewenstein, J. Physiol., **130**, 559 (1955). <sup>9</sup> Г. А. Наследов, Физиол. журн. СССР, **46**, 1250 (1960). <sup>10</sup> J. Erlanger, H. S. Gasser, G. H. Bishop, Am. J. Physiol., **81**, 473 (1927). <sup>11</sup> П. Г. Костюк, Биофизика, **3**, 274 (1958). <sup>12</sup> A. Lundberg, H. Quilisch, Acta Physiol. Scand., **30**, suppl. 111 (1953). <sup>13</sup> J. C. Eccles, B. Katz, S. W. Kuffler, J. Neurophysiol., **4**, 362 (1941). <sup>14</sup> S. W. Kuffler, J. Neurophysiol., **5**, 199 (1942). <sup>15</sup> Л. А. Орбели, Лекции по физиологии нервной системы, Л., 1935, стр. 305.

С. Г. СОИН и Ж. А. ЧЕРНЯЕВ

**О РАЗВИТИИ ПЕРИБЛАСТИЧЕСКОГО СИНУСА У ЭМБРИОНОВ  
ЛОСОСЕВИДНЫХ И НЕКОТОРЫХ ДРУГИХ КОСТИСТЫХ РЫБ**

(Представлено академиком В. Н. Шапошниковым 9 XI 1960)

При изучении развития черного байкальского хариуса (*Thymallus arcticus baicalensis* (Dyb.)) весной 1956 г. на оз. Байкал мы обнаружили у эмбрионов этой рыбы весьма интересное образование, которое ранее не привлекало особого внимания исследователей.

В процессе гастрюляции в момент начала образования тела хариуса (возраст 3 суток 21 час после оплодотворения, при температуре воды 7—9°) впереди и ниже головного отдела образуется прозрачная полость, наполненная жидкостью с несколько иной степенью преломления света, чем перивителлиновая жидкость. Эта полость не связана с формирующейся под головой перикардиальной полостью сердца и обособлена от нее значительным промежутком. В дальнейшем она приобретает более выпуклую пузыревидную форму и затем постепенно исчезает.

Подобное образование было отмечено еще в давней работе Фогта <sup>(3)</sup> на рисунках по развитию *Coregonus palaea* Cuv. и названо им «желточным пузырем». Мы предлагаем его называть «перибластическим синусом», так как развивается оно в виде полости под перибластом; под желточным же пузырем обычно подразумевается собственно желточный мешок. Однако как Фогтом, так и после другими исследователями этому образованию не было придано значения. И лишь И. И. Смольянов <sup>(1)</sup> снова обратил внимание на такое явление у зародышей нельмы (*Stenodus leucichthys nelma* (Pall.)) и сига-нельмушки (*Coregonus lavaretus nelmuschka* (Pravdin)): однако предположил его патологический характер.

Наши же наблюдения за развитием перибластического синуса у черного байкальского хариуса приводят нас к выводу о том, что образование его является нормальным и закономерным явлением. Основанием этому служит, прежде всего, то, что перибластический синус у зародышей хариуса занимает определенное положение и развивается в определенный период эмбриогенеза. Развитие его наблюдалось у всех зародышей хариуса — как инкубированных в лаборатории, так и взятых из природы.

Как уже отмечалось выше, на стадии гастрюлы впереди формирующегося головного отдела зародыша хариуса появляется прозрачная полость, длина основания которой равна 2,6 мм, что составляет больше половины диаметра желточного мешка, равного 3,3 мм (рис. 1Г). Сначала эта полость, заполненная жидкостью, сбоку имеет вид прозрачного серповидного синуса, ограниченного перибластом и занимающего четверть окружности желточного мешка. В процессе дальнейшего развития зародыша объем и основание этого синуса постепенно сокращаются, но при этом он принимает более выпуклую пузыревидную форму (рис. 1Д, Е, нбс). К моменту замыкания у зародыша желточной пробки (возраст 5 суток; рис. 1Ж) перибластический синус становится еще более выпуклым, а основание его при этом сокращается до 1,1 мм. В это время у зародыша значительная часть тела сегментирована, в голове сформированы основные отделы мозга, в глазах появляется хрусталик, слуховые капсулы — в виде плакод. После замыкания

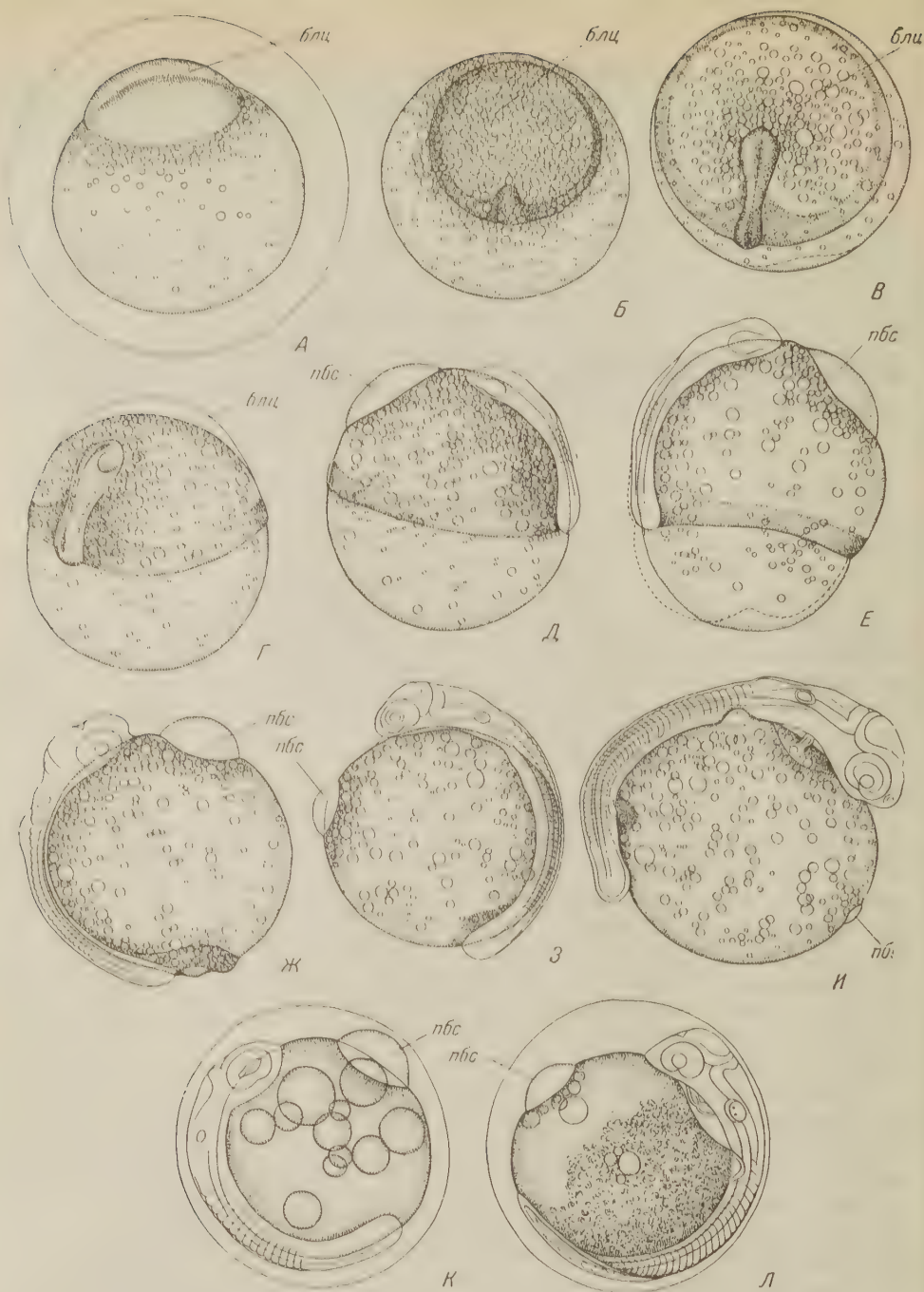


Рис. 1. Развитие перибластического синуса. А — И — черный байкальский хариус (*Thymallus arcticus baicalensis* (Dyb.)): А — икринка на стадии бластулы, возраст 2 суток 8 час., диаметр с оболочкой 4,4 мм, без оболочки 3,3 мм; Б — начало гаструляции, возраст 2 суток 17 час.; В — начало формирования тела зародыша (вид сверху с анимального полюса), возраст 3 суток 18 час.; Г — начало сегментации тела и закладка глазных пузырей, возраст 3 суток 21 час, бластоцель (блц) в виде прозрачной серповидной полости; Д — дальнейшее формирование тела зародыша и обрастание желтка бластодермой, возраст 4 суток, бластоцель принимает форму синуса; Е — зародыш в возрасте 4 суток 8 час.; Ж — стадия замыкания желточной пробки, возраст 5 суток, перибластический синус (пбс) наиболее выпуклый; З — зародыш с замкнутой желточной пробкой на стадии начала обособления хвоста, возраст 6 суток; И — начало подвижного состояния зародыша, возраст 6 суток 6 час., перибластический синус в виде незначительного остатка, К — зародыш рипуса (*Coregonus albula infraspecies ladogensis* Pravdin) с перибластическим синусом, возраст 18 суток, при температуре воды 5—6°; диаметр икринки с оболочкой 1,9 мм, без оболочки 1,6 мм. Л — зародыш байкальского бычка — желтокрылки (*Cottocomephorus grewingkii* (Dyb.)) с перибластическим синусом, возраст 13 суток, при температуре воды 10—12°, диаметр икринки с оболочкой 2,2 мм, без оболочки 1,8 мм

желточной пробки, по мере дальнейшей дифференциации мускулатуры, тело зародыша становится слабоподвижным и к этому времени (возраст 5 суток 13 час.; рис. 1 З) происходит еще более значительное уменьшение объема перибластического синуса. Полное исчезновение его завершается к тому моменту, когда зародыш приобретает более заметную подвижность и может активно изменять свое положение внутри оболочки. У зародыша, изображенного на рис. 1 И, в возрасте 6 суток 6 час., перибластический синус имеет вид лишь незначительного остатка. Хвостовой отдел зародыша в это время обособлен от желтка, начало пульсировать сердце, заложились грудные плавники и появились обонятельные капсулы, а в слуховых капсулах образовалась полость.

Развитие перибластического синуса, как оказалось в дальнейшем, представляет собой более широкое явление; он обнаружен за последнее время и у ряда других рыб, причем относящихся не только к группе лососевидных. Наличие его установлено: С. Г. Соиным у рипуса (*Coregonus albula infraspecies ladogensis* (Pravdin) — рис. 1 К); С. Г. Соиным и А. Ф. Турдаковым у байкальских бычков — желтокрылки (*Cottocomephorus grawingki* (Dyb.) — рис. 1 Л), каменной широколобки (*Cottus kneri* (Dyb.)), песчаной широколобки (*Cottus kessleri* (Dyb.)); В. П. Серебряковым у невского сига (*Coregonus lavaretus lavaretus* L.); И. С. Васильевым у амурского хариуса (*Thymallus arcticus grubei* (Pall.)). У всех зародышей перечисленных рыб перибластический синус образуется на том же самом месте и на тех же стадиях развития, что и у зародышей черного байкальского хариуса. После исчезновения перибластического синуса развитие их продолжалось нормально, а это также служит доказательством того, что возникновение его у зародышей рыб не обусловлено какой-либо патологией.

Образование перибластического синуса у зародышей названных рыб, как мы полагаем, связано с разрастанием и выпячиванием бластоцеля. Эта полость, возникающая на стадии бластулы (рис. 1 А, блц), продолжает сохраняться у них и на последующих стадиях развития. В процессе gastrуляции бластоцель оказывается расположенным впереди формирующегося головного отдела зародыша (рис. 1 Б—Г, блц). По мере обрастания желтка бластодермой и разрастания головной части зародыша бластоцель, по-видимому, все более смещается вперед и затем, выпячиваясь, превращается в перибластический синус (рис. 1 Д—И, пбс), подвергающийся в дальнейшем указанным выше изменениям. Всего этого процесса в деталях нам наблюдать не удалось, так как для этого требуется специальное микроскопическое исследование, что предполагается нами сделать в дальнейшем.

По вопросу функционального значения перибластического синуса мы можем высказать также только предположение. Нам представляется, что он выполняет функцию гидростатического органа, с помощью которого еще неподвижный зародыш всегда ориентирован головным отделом кверху. Этому способствуют и жировые капли, наибольшее число которых концентрируется теперь не только у тела зародыша, но и в области основания перибластического синуса. Такая ориентация зародыша головной частью вверх имеет особое значение при развитии икры на дне, так как при этом положении наиболее важные органы зародыша оказываются в лучших условиях аэрации, чем те, которые обращены вниз и прижаты к оболочке, а вместе с ней и ко дну под действием своей тяжести. Позднее зародыш становится подвижным и может активно изменять свое положение внутри оболочки, поэтому с данного момента значение перибластического синуса как гидростатического органа утрачивается, и он исчезает. Своими активными движениями, зародыш, постоянно меняя свое положение внутри оболочки и при этом перемешивая перивителлиновую жидкость, способствует лучшей и равномерной аэрации. Благодаря этому условия дыхания зародыша внутри оболочки становятся всюду одинаковыми в любом его положении.

У пелагофильных рыб, икра которых во время развития находится в плавающем состоянии, перибластического синуса нами не наблюдалось.

Необходимость строгой ориентации зародыша рыб головным отделом вверх в период его органогенеза с помощью перибластического синуса может быть обусловлена и тем, что нормальный ход формообразовательного процесса в это время требует именно такого положения зародыша; в противном же случае развитие его, возможно, будет нарушено. Из опытов Клавара и Филогамо (<sup>2</sup>), например, известно, что искусственное изменение нормального положения анимального полюса дробящегося яйца живородящей рыбки гуппи приводит в дальнейшем к смещению места закладки зародышевого узелка или образованию двух краевых узелков. Указанные авторы считают, что место формирования эмбриона у гуппи определяется положением зародышевого диска перед началом гастрюляции. Это интересное явление требует дальнейших экспериментальных исследований и у других рыб, а особенно у тех, зародыши которых обладают перибластическим синусом.

Мы надеемся, что настоящее сообщение привлечет внимание эмбриологов к выяснению того, насколько широко распространено наличие перибластического синуса у зародышей других видов костистых рыб, включая даже и тех, развитие которых уже достаточно хорошо изучено, так как данному явлению до сих пор не придавалось серьезного значения. Особое внимание при этом должно быть уделено вопросам происхождения и функционального значения этого образования.

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

Поступило  
21 X 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> И. И. Смольянов, Тр. Инст. морфол. животн. им. А. Н. Северцова АН СССР, в. 20 (1957). <sup>2</sup> J. Clavart, G. Filogamo, C. R. Soc. biol., 152, 10 (1958). <sup>3</sup> C. Vogt, Embryologie des salmons, Histoire naturelle des poissons d'eau douce, Neuchâtel, 1842.

О. П. КУЛАКОВСКАЯ и Р. А. КРОТАС

**О KHAVIA SINENSIS HSÜ (CARYOPHYLLAEIDAE, CESTODA) —  
ПАРАЗИТЕ, ЗАВЕЗЕННОМ С ДАЛЬНЕГО ВОСТОКА  
В КАРПОВЫЕ ХОЗЯЙСТВА ЗАПАДНЫХ ОБЛАСТЕЙ СССР**

(Представлено академиком Е. Н. Павловским 29 XI 1960)

Возбудителем кариофиллеза карпов в прудовых хозяйствах СССР является гвоздичник *Caryophyllaeus fimbriceps* Annenkowa-Chlopina, 1919 (рис. 1), описанный <sup>(1)</sup> из кишечника каспийского сазана, иногда неправильно определяемый как *C. laticeps* (Pallas, 1781). Длина тела половозрелого *C. fimbriceps* от 15 до 25 мм, ширина 1,0—1,5 мм. Головка веерообразно расширена, с многочисленными фестонами. Шейный отдел четко не выражен. Желточники и семенники начинаются сразу за головкой. Семенники оканчиваются на уровне верхнего края сумки цирруса; желточники доходят до переднего края крыльев яичника. Имеется небольшая группа постовариальных желточников. Сумка цирруса крупная, мускулистая, удлинённая. Размеры ее 1,0 × 0,8 мм. Яичник с узкими длинными лопастями около 2 мм длиной. Матка и влагалище, соединяясь, образуют общий утеровагинальный проток. На уровне мостика яичника влагалище расширяется и образует семеприемник. Петель матки немного, располагаются они позади и впереди мостика яичника, достигая нижней границы сумки цирруса. Яйца овальной формы, с крышечкой и филаментом; размеры их 0,063—0,070 × 0,035—0,040 мм.

До настоящего времени считали, что у карпов наших прудовых хозяйств паразитирует только один вид гвоздичника — *Caryophyllaeus fimbriceps*. Однако при более глубоком изучении этих червей, собранных из ряда прудовых карповых хозяйств, мы обнаружили еще один вид, который резко отличается от *C. fimbriceps* размерами тела, расположением семенников и желточников, величиной сумки цирруса, формой яичника, расположением и количеством петель матки, наконец размерами яиц.

Диагностические признаки найденного нами гвоздичника (рис. 2) указывают на полную идентичность его с *Khavia sinensis* Hsü, который был описан <sup>(2)</sup> для *Surginus sagrio* из окрестностей Пекина.

Для данной работы нами использованы собственные сборы из прудовых хозяйств западных областей УССР («Рудники», «Бабин», «Комарно») и Литовской ССР («Арненай», «Арвидай», «Васакна», «Шилопавежупис», «Воке»), а также некоторые материалы, любезно предоставленные В. М. Ивасиком.

Приводим краткое описание этого вида по нашим материалам. Длина тела половозрелых особей 45—83 мм, ширина 2,5—3 мм. Сколекс расширенный, с большим количеством фестонов. Шейка четко не выражена. Желточники и семенники начинаются не сразу за головкой, как у *C. fimbriceps*, а несколько ниже. У головного конца они мелкие и расположены редко, дальше к заднему концу становятся крупнее и гуще. Желточники доходят до сумки цирруса плотным слоем, вдоль петель матки имеется лишь несколько фолликул. В области яичника желточные фолликулы исчезают полностью и густым скоплением появляются в задней части тела, закрывая концы задних крыльев яичника. Диаметр их 0,128—0,135 мм. Семенники начинаются немного ниже желточников и размещаются в центральном поле паренхимы. Размеры их 0,16—0,19 × 0,14—0,18 мм. Сумка цирруса круг-

лая, иногда чуть овальная, небольших размеров ( $0,76 \times 0,80$  мм), иногда заходит в зону желточников. Яичник по форме напоминает букву Н с более массивными передними долями. Длина яичника 3,2—3,4 мм. Поперечный мостик относительно узкий и короткий. Строение яичника рыхлое (не компактное, как у *C. fimbriceps*). Матка состоит из многочисленных петель, основная масса которых располагается впереди яичника и простирается на расстояние 6—6,7 мм над мостиком яичника. Концевая часть матки соединяется с влагалищем, образуя утеровагинальный канал около 0,123 мм

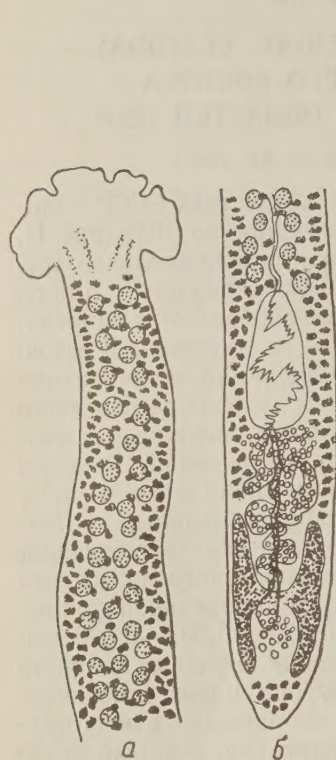


Рис. 1. *Caryophyllaeus fimbriceps* App. а — передний конец тела, б — задний конец тела. 10 ×

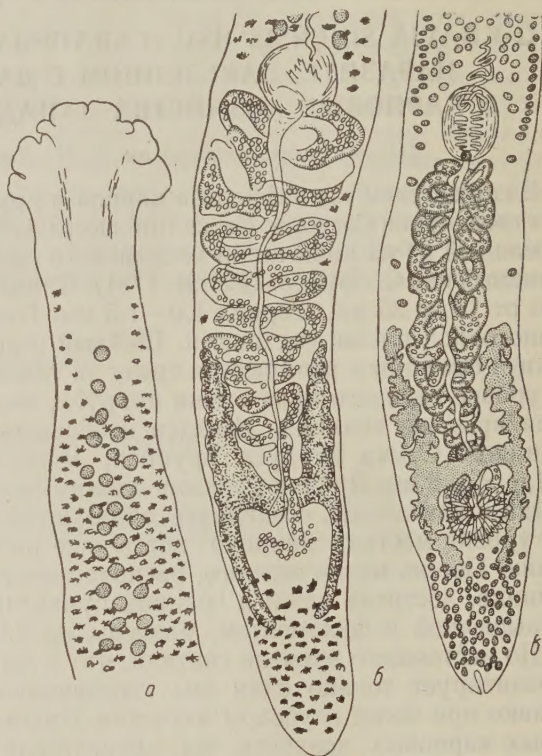


Рис. 2. *Khavia sinensis* Н. Нсü. а — передний конец тела; б — задний конец тела  $10^4 \times$ ; в — задний конец тела, по Нсü <sup>(2)</sup>

длиной. На уровне мостика яичника влагалище образует крупный семеприемник удлинённой формы, размером около  $0,39 \times 0,19$  мм. Задняя часть тела червя, включая сумку цирруса, яичник, матку и постовариальные желточники, занимает 8—11 мм. В матке много мелких овальной формы яиц, размером  $0,042 - 0,048 \times 0,025 - 0,027$  мм. Стенка матки снабжена многочисленными железами, отчего у молодых экземпляров она выглядит очень толстой.

*K. sinensis* легко отличать от *C. fimbriceps* и на молодых стадиях, по строению заднего конца тела червя — величине и форме сумки цирруса, характеру петель матки, форме и строению яичника.

Встречается в кишечнике гибридов амурских сазанов с карпами.

Распространение: некоторые прудовые хозяйства западной части Украины, Латвийской, Литовской и Белорусской ССР.

Интенсивность заражения — от 1 до 18 червей в одной рыбе. Гвоздичники *K. sinensis* пока что обнаружены в тех хозяйствах, где имеются амурские сазаны и их гибриды с карпом. Не вызывает сомнения, что данный вид был завезен с амурским сазаном в наши хозяйства из водоемов Дальнего Востока и, по всей вероятности, распространен довольно широко. В прудовые хо-

зайства ЛитССР *K. sinensis* был завезен в 1954—1955 гг. вместе с гибридами сазана и карпа, полученными из прудовых хозяйств БССР и ЛатвССР. В хозяйствах, в которые не завозились гибриды сазана с карпом, *K. sinensis* не обнаружены.

Этот новый случай завоза паразита еще раз указывает на необходимость исключительно тщательного паразитологического контроля объектов, перевозимых в целях акклиматизации.

В заключение выражаем глубокую признательность В. М. Ивасику за переданные материалы и М. Н. Дубининой за ценные указания при написании данной работы.

Научно-природоведческий музей  
Академии наук УССР

Институт зоологии и паразитологии  
Академии наук ЛитССР

Поступило  
17 XI 1960

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Н. П. Анненкова - Хлопина, Изв. Российск. Акад. Наук, 1919.  
<sup>2</sup> Н. F. H s y, Rev. Suisse zool., 42 (1935).

